1. 序

組合せ論において，様々な形で母函数といわれるものが登場する．ここではポリアの数え上げの手法に関連した母函数の使われ方を取り上げて，母函数というものの考え方について筆者なりに現時点で理解しているところを述べてみたい．ひとことでいうと“ある対象の数の分布状況を，代数系を利用して形式的な代数計算に帰着させることにより知る手法”といえるのではないだろうか．利用する代数系としては，多項式環あるいは形式的べき級数環が典型的で，代数計算としては，加法，乗法，代入や微分などが主要なものである．

2. 木の数え上げ

この節ではポリアの論文[P-R]に従って，木と呼ばれるある種のグラフを数え上げることを取り上げる．ここでいうグラフとは，$\Gamma=(V, E)$ という集合の対で，V は頂点集合，E は辺集合である．(以下では，集合は有限集合に限って考える．) 辺は，2頂点をつなぐ線分に相当し，辺の長さや頂点の位置は無視して頂点間のつなぎ具合のみに着目する．木(tree)とは，連結でサイクルを含まないグラフのことをいう．したがってグラフが木であるためには，任意の2頂点がただ一通りの方法で辺をつたわってつなげるということが必要十分である．さらに頂点の1つをあらかじめ指定した木を根付き木という．頂点の数が n 個の根付き木の数を t_n とするとき，

$$T(x)=t_0+t_1x+t_2x^2+\cdots+t_nx^n+\cdots$$

という母函数を考える．($t_0=0, t_1=1, t_2=1, t_3=2, t_4=4, \cdots$である．)

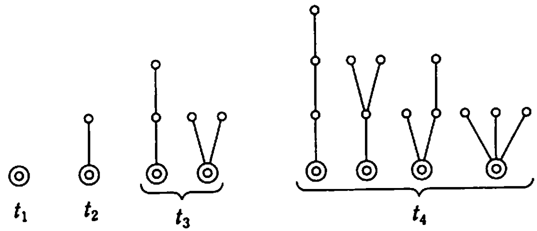

図 1

この $T(x)$ について，Cayley は，等式

$$T(x)=\frac{x}{(1-x)^{t_1}(1-x^2)^{t_2}\cdots(1-x^n)^{t_n}\cdots}$$

が成立することを見出した．この式は，根に直接くっついた枝（根にあたる頂点を取り除いたときの連結成分）の頂点数でタイプ分けして，各タイプが何個ずつ登場するかに着目して得られる等式である．この式を変形することにより別の等式として

$$T(x)=x\cdot\exp\left(\frac{T(x)}{1}+\frac{T(x^2)}{2}+\cdots+\frac{T(x^n)}{n}+\cdots\right)$$

及び

$$T(x)=x\left(1+\frac{T(x)}{1!}+\frac{T(x^2)+T(x^2)}{2!}+\frac{T(x)^3+3T(x)T(x^2)+2T(x^3)}{3!}+\cdots\right)$$

が得られる．最後の式は，根から出ている枝の数で分類して対称性を考慮して数える方法を示唆し

ており，後で述べる対称群の輪指標と呼ばれるものから来ている．これらの等式から漸化的に $t_1, t_2, t_3, \cdots$ を求めていくことができる．

3．グラフの数え上げと輪指標

ポリアの輪指標から得られる母函数についてこの節では，[H-P]に従って解説する．

(3-1) Cauchy-Frobenius の定理

群 G が集合 X に作用しているとき，その軌道の個数は，$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)$ で与えられる．ここで $\chi(g)$ は，g の固定点の数を表す．

(3-2) 輪指標とポリアの定理

置換群 (G, X) の輪指標 $Z(G, X)$ とは，変数 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ の多項式で次のように定める $(n = |X|)$．

$$Z(G, X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} s(g)$$

但し，g が X 上で引き起こす置換のタイプが，$1^{\lambda_1(g)}2^{\lambda_2(g)}\cdots n^{\lambda_n(g)}$ のとき

$$s(g) = s_1^{\lambda_1(g)}s_2^{\lambda_2(g)}\cdots s_n^{\lambda_n(g)}$$

とおく．これ自体は，置換群の要素のサイクルタイプの確率の母函数ということもできるのだが，この輪指標からある種の数え上げの母函数が求められる．証明などの詳細については，たとえば[B]を参照して頂きたい．

ポリアの定理：置換群 (G, X) と集合 $Y = \{y_1, \cdots, y_r\}$ に対して，X から Y への写像全体の集合 $\mathrm{Map}(X, Y)$ を群 G の作用で類別したときの類の母函数は，$Z(G, X\,;\, z_1+z_2+\cdots+z_r)$ で与えられる．但し，$z_1, \cdots, z_r$ は Y の要素 $y_1, \cdots, y_r$ に対応する変数で，$Z(G, X\,;\, f(z_1, \cdots, z_r))$ は，$Z(G, X)$ の各変数 s_k に $f(z_1^k, z_2^k, \cdots, z_r^k)$ を代入して得られる多項式を表す．

例)　正六角形の頂点に赤，青の 2 色のうちどちらかの色を塗る．回転して同じ塗り方となっているものは，同一とみて何通りの塗り方があるか．また，赤が 4 箇所，青が 2 箇所となる塗り方は何通りか．

この例の状況は位数 6 の巡回群 C_6 が頂点集合 $X_6 = \{x_1, \cdots, x_6\}$ に自然に作用する場合にあたる．$Y = \{$赤，青$\}$ で赤に変数 a，青に変数 b を対応させることにする．輪指標は，

$$Z(C_6, X_6) = \frac{1}{6}(s_1^6+s_2^3+2s_3^2+2s_6)$$

で，

$$s_1 = a+b,\ s_2 = a^2+b^2, \cdots, s_6 = a^6+b^6$$

を代入して展開すると，

$$Z(C_6, X_6\,;\, a+b)$$
$$= a^6+a^5b+3a^4b^2+4a^3b^3+3a^2b^4+ab^5+b^6$$

となる．この式から ($a = b = 1$ とすることにより) 14 通りの塗り方があり，a^4b^2 の係数より赤 4 箇所，青 2 箇所の塗り方が 3 通りあることになる．

(3-3) 置換群の直和，直積の輪指標

2 つの置換群 (G, X) と (H, Y) に対してその直和の置換群 $(G\times H, X+Y)$ を自然に作ることができる．このとき，この輪指標は，それぞれの輪指標の多項式としての積となる．また直積の置換群 $(G\times H, X\times Y)$ については，

定理：$Z(G\times H, X\times Y)$
$$= Z(G, X) * Z(H, Y)$$

が成立する．但し，多項式の演算 $*$ は，次のように定める．単項同士については，

$$\left(\prod_{r=1}^{d} s_r^{i_r}\right) * \left(\prod_{t=1}^{d} s_t^{j_t}\right) = \prod_{1\le r,t\le d} s_{[r,t]}^{(r,t)i_r j_t}$$

とし，これを線形に拡張する．$[r, t]$ は r と t の最小公倍数，(r, t) は r と t の最大公約数である．

例)　n 次対称群 S_n が，n 点集合 X_n に置換で作用する．このとき，

$$Z(S_2, X_2) = \frac{1}{2}(s_1^2+s_2),$$

$$Z(S_3, X_3) = \frac{1}{6}(s_1^3+3s_1s_2+2s_3)$$

である．

$$s_1^2 * s_1^3 = s_1^6,\ s_1^2 * s_1s_2 = s_1^2s_2^2,\ s_1^2 * s_3 = s_3^2$$

などにより，

$$Z(S_2\times S_3, X_2\times X_3)$$
$$= \frac{1}{12}(s_1^6+3s_1^2s_2^2+2s_3^2+4s_2^3+2s_6)$$

となる．これにたとえば，s_k に $1+x^k$ を代入して

展開すると，

$$1+x+3x^2+3x^3+3x^4+x^5+x^6$$

となる．この式から，集合 $V=\{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$ 上のグラフで辺が a_i と b_j をつなぐようなもののみから成るグラフで，添字の違いを無視したグラフの，辺の数で分類した分布状況が読み取れる．(x^k の係数が，辺の数 k 個のグラフの数となる．)

(3-4) グラフの重ね合わせ (super position)

頂点の数が等しい 2 つのグラフを，頂点で重ね合わせてどのようなパターンが作れるかを問題にする．2 つのパターンが同じとは，頂点の名前の付け替えをすれば，一方から他方が作れることとする．グラフが 1 つだけのとき，頂点の置換で自分自身と同じグラフとなるものの全体は群を成す．グラフ Γ に対するこの群を $G(\Gamma)$ で表し，Γ の自己同型群という．この群の頂点集合に対する輪指標を用いて，重ね合わせのタイプの数が求められる．そのために，$s_1, \cdots, s_d$ を変数とする多項式の演算 $\cap$ と $\cup$ を次のように定める．簡単のため $I=(i_1, i_2, \cdots, i_d)$ に対して

$$s^I = s_1^{i_1} s_2^{i_2} \cdots s_d^{i_d}$$

と書くことにする．まず単項同士については，$I=J$ ならば，

$$s^I \cap s^J = \prod_{k=1}^{d} (k^{i_k} i_k!)$$

$I \neq J$ なら

$$s^I \cap s^J = 0$$

と定める．また，これを利用して

$$s^I \cup s^J = (s^I \cap s^J) \cdot s^I$$

と定める．この演算をそれぞれ線形に拡張して，多項式同士の演算とする．この演算を用いて，頂点の数がどちらも d 個である 2 つのグラフ Γ_1 と Γ_2 を重ね合わせて作られるパターンの数は，

$$Z(G(\Gamma_1), V_1) \cap Z(G(\Gamma_2), V_2) \text{ 個}$$

と書ける．さらに，この個数を r とし，その各々のパターンの自己同型群を $G_1, \cdots, G_r$ とすると，

$$Z(G(\Gamma_1), V_1) \cup Z(G(\Gamma_2), V_2) = Z(G_1)+Z(G_2)+\cdots+Z(G_r)$$

が成立する．ここで $Z(G_i)$ は群 G_i をパターンの頂点の置換とみての輪指標である．これらのことは，3 個以上のグラフの重ね合せについても拡張され Redfield の数え上げ定理と呼ばれている．

例）　正五角形の頂点と辺で作られるグラフを Γ とすると，その自己同型群は，$G(\Gamma)=D_5$ (位数 10 の二面体群) となる．頂点集合 V への作用の輪指標は

$$Z(D_5, V) = \frac{1}{10}(s_1^5+4s_5+5s_1s_2^2)$$

で

$$Z(D_5, V) \cap Z(D_5, V) = 4$$

となる．したがって Γ と Γ を重ね合わせたパターンは，4 通りあることになる．

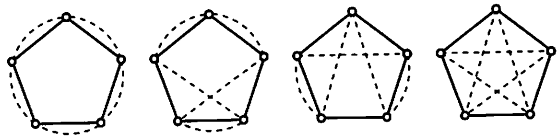

図 2

4．Joyal の species

母函数を用いた数え上げの手法については，[B]の序論に「…特定の意味を持たない変数の[形式的]多項式の係数を計算して，それによって $|A|=|B|$ がいえたとしても，あまり好ましくはないのである．」とあり，その注記に「1 世紀にわたって猛威をふるった母関数の方法は，この理由で使用されなくなった．」とある．しかし，ここで説明する A. Joyal の考案した species というものの出現により状況は少なからず変化したように思われる．簡単にいうと母函数の係数を数ではなく集合のままで扱おうとする考え方である．そこでは，“母函数”の等式が，係数にあたる集合の間の“自然な”1 対 1 の対応から来ているものと考えたいのである．この着想を正確に記述するために圏と関手の概念が必要になる．

(4-1) 圏と関手

圏 $\mathscr{C}$ とは，対象 (object) の集まり ob($\mathscr{C}$) と射 (morphism) の集まり mor($\mathscr{C}$) とから成り，次の性質を満たしているものをいう．

(c 1)　mor($\mathscr{C}$) の構成要素である射の各々には，定義域と補域と呼ばれる ob($\mathscr{C}$) の構成要素が定

められている．射 f に対しこれらを $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{cod}(f)$ と表す．

(c 2)　$\mathrm{cod}(f)=\mathrm{dom}(g)$ なる 2 つの射 f, g に対して合成射と呼ばれる射 $g\circ f$ で，

$$\mathrm{dom}(g\circ f)=\mathrm{dom}(f),\quad \mathrm{cod}(g\circ f)=\mathrm{cod}(g)$$

を満たすものが定められている．

(c 3)　対象の各々に，恒等射と呼ばれる射が定められている．対象 A の恒等射を id_A と表すと，

$$\mathrm{dom}(id_A)=\mathrm{cod}(id_A)=A$$

で，

$\mathrm{dom}(f)=A$ なる任意の射 f に対して $f\circ id_A=f$

$\mathrm{cod}(f)=A$ なる任意の射 f に対して $id_A\circ f=f$

を満たしている．

(c 4)　$\mathscr{C}$ の対象 A, B に対して射 f で

$$\mathrm{dom}(f)=A,\quad \mathrm{cod}(f)=B$$

を満たす $\mathscr{C}$ の射の全体は集合である．（この集合は，有限集合という制限はつけない．）これを $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ と表す．

(c 5)　射の合成は，結合律を満たす．すなわち，3 つの射 f, g, h が

$$\mathrm{cod}(f)=\mathrm{dom}(g), \mathrm{cod}(g)=\mathrm{dom}(h)$$

ならば，

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

である．

例)　圏の典型的な例は，集合と写像が作る圏 Set である．組合せ論では，集合の要素の数に着目するので，集合として有限集合，射として全単射だけに限って作られる圏 $\mathscr{B}$ が重要となる．

次に関手を定義する．$F: \mathscr{C}\to\mathscr{D}$ が，圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への（共変）関手であるとは，$\mathscr{C}$ の各対象 A に $\mathscr{D}$ の対象 $F(A)$ が対応し，また $\mathscr{C}$ の各射 f に $\mathscr{D}$ の射 $F(f)$ が対応していて，次の性質を満たしていることをいう．

（1）　$\mathrm{dom}(F(f))=F(\mathrm{dom}(f))$,

$\quad\mathrm{cod}(F(f))=F(\mathrm{cod}(f))$

（2）　F は射の合成を保つ．i. e. $\mathrm{cod}(f)=\mathrm{dom}(g)$ なら

$$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$$

を満たす．

（3）　F は恒等射を保つ．i. e. $F(id_A)=id_{F(A)}$

(4-2) species の定義と例

Joyal が[J]で定義した species とは，$\mathscr{B}$ から $\mathscr{B}$ への関手のことである．

例 1)　集合 A に集合 A を対応させ，全単射 $f: A\to B$ に $f: A\to B$ を対応させる恒等関手を $id_{\mathscr{B}}: \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ とすると，これは species である．

例 2)　集合 A に A の部分集合全体の集合 $P(A)$ を対応させ，全単射 $f: A\to B$ に，自然に引き起こされる全単射 $P(f): P(A)\to P(B)$ を対応させることにより得られる関手 $P: \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ は，species である．

例 3)　1 個の要素から成る集合 $E=\{*\}$ をあらかじめ 1 つ定める．集合 A にこの集合 E を対応させ，全単射 $f: A\to B$ に E の恒等射 id_E を対応させることにより得られる関手 $\mathrm{Exp}: \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ は species である．

例 4)　集合 A に対して，A を頂点集合とするグラフの全体の集合 Graph (A) を対応させる．このとき全単射 $f: A\to B$ から得られる頂点の名前のつけ替えで，

$$\mathrm{Graph}(f): \mathrm{Graph}(A)\to\mathrm{Graph}(B)$$

なる全単射が，自然に導びかれ，これにより定まる関手 $\mathrm{Grap}: \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ は species である．

例 5)　集合 C を 1 つ定めると，これを用いて関手 $X^C: \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ を次のように決めることができる．集合 A に対し

$$X^C(A)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(C, A)$$

とする．これは，A が C と同型（要素の個数が同じ）でなければ空集合，C と同型なら $|C|!$ 個の要素からなる集合である．全単射 $f: A\to B$ に対し，$X^C(f): X^C(A)\to X^C(B)$ は f を合成することにより得られる写像と定める．この X^C も species である．

例 6)　関手 $L: \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ を，集合 A に A の上の全順序の全体の集合を対応させ，射は，名前のつけ替えで得られる自然な対応で定義する．また，$\mathrm{Aut}: \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ なる関手を，集合 A にその自己同型写像全体の集合を対応させ，射は自然に引き起こされる対応で定める．これらも species である．

次に，2 つの species S, T が同型とは，関手の自然変換 $\alpha: S\to T$ が存在することであると定める．すなわち各集合 A ごとに同型射 $\alpha_A: S(A)\simeq T(A)$ が対応していて，任意の全単射 $f: A\to B$ に対して，$\alpha_B\circ S(f)=T(f)\circ\alpha_A$ となっていることをいう．例 6 では，各 A ごとには $L(A)$ も $\mathrm{Aut}(A)$ も $|A|!$ 個の要素をもつので，同型射が作れるが，自然変換となっているようには選べないので L と Aut は同型ではない．(cf. 4-6)

(4-3) species の母函数

species $M: \mathcal{B}\to\mathcal{B}$ の母函数を

$$\mathrm{gen}(M,x)=\sum_{n\geq 0}\left|M(\underline{n})\right|\frac{x^n}{n!}$$

と定める．ここで $\underline{n}=\{1,2,\cdots,n\}$, $\underline{0}=\phi$ である．

[例 1]　$\mathrm{gen}(Id_{\mathcal{B}},x)=\sum_{n\geq 0}n\frac{x^n}{n!}$

[例 2]　$\mathrm{gen}(P,x)=\sum_{n\geq 0}2^n\frac{x^n}{n!}$

[例 3]　$\mathrm{gen}(\mathrm{Exp},x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$

[例 4]　$\mathrm{gen}(\mathrm{Graph},x)=\sum_{n\geq 0}2^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{x^n}{n!}$

[例 5]　$\mathrm{gen}(X^c,x)=x^{|c|}$

[例 6]　$\mathrm{gen}(L,x)=\mathrm{gen}(\mathrm{Aut},x)=\frac{1}{1-x}$

(4-4) species の演算

species の加法，乗法，デカルト積，代入という 4 つの基本的な演算を次のように定める．以下で S, T は species とし，さらに (代入) においては，$T(\phi)=\phi$ を満たしているとする．また A は集合とする．

(加法)　関手 $S+T: \mathcal{B}\to\mathcal{B}$ を，対象については

$$(S+T)(A)=S(A)+T(A)$$

で定める．但し，右辺の $+$ は，集合の直和の演算記号である．射については，直和に対して自然に得られるものを対応させる．

(乗法)　関手 $S\cdot T: \mathcal{B}\to\mathcal{B}$ を，対象については

$$(S\cdot T)(A)=\sum_{A_1+A_2=A}S(A_1)\times T(A_2)$$

と定める．但し，右辺の和は，A の直和分解の対 (A_1, A_2) のすべてにわたって集合の直積 $S(A_1)\times T(A_2)$ の直和をとったものを表す．射については，各直和分解に応じて得られる自然な射の直和とする．

(デカルト積)　関手 $S\times T: \mathcal{B}\to\mathcal{B}$ を，対象については，

$$(S\times T)(A)=S(A)\times T(A)$$

で定め，射については，自然に得られる直積の射を対応させる．

(代入)　関手 $S[T]: \mathcal{B}\to\mathcal{B}$ を，対象については，

$$\begin{aligned}(S[T])(A)&=\sum_{r=1}^{|A|}\sum_{\{A_1,\cdots,A_r\}\in\mathrm{Part}(A,r)}S(\{A_1,A_2,\cdots,A_r\})\\&\quad\times T(A_1)\times\cdots\times T(A_r)\end{aligned}$$

と定める．但し，Part (A, r) は，A の r 個の部分集合による分割全体の集合を表す．すなわち，

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}\in P(P(A))$$

で，$A_1+A_2+\cdots+A_r=A$ を満たすもの全体の集合である．

このように定めると，母函数について次の等式が成立する．

$$\mathrm{gen}(S+T,x)=\mathrm{gen}(S,x)+\mathrm{gen}(T,x)$$
$$\mathrm{gen}(S\cdot T,x)=\mathrm{gen}(S,x)\cdot\mathrm{gen}(T,x)$$
$$\mathrm{gen}(S[T],x)=\mathrm{gen}(S,\mathrm{gen}(T,x))$$

(4-5) species の輪指標列

species $M: \mathcal{B}\to\mathcal{B}$ に対して，$M(\underline{n})$ には，$\underline{n}$ の自己同型射全体が射の合成を演算としてなす群 $\mathrm{aut}(\underline{n})$ が自然に作用する．$\mathrm{aut}(\underline{n})$ は，n 次対称群である．この作用による軌道の数の通常の母函数を，

$$\widetilde{\mathrm{gen}}(M,x)=\sum_{n\geq 0}|\mathrm{Orb}(S_n, M(\underline{n}))|x^n$$

で定める．これを求めるために，species M の輪指標列を，

$$\begin{aligned}&Z_M(s_1, s_2, \cdots)\\&\quad=\sum_{n\geq 0}\sum_{\lambda\in\mathrm{Part}(n)}\mathrm{fix}(\sigma(\lambda), M(\underline{n}))\frac{s^\lambda}{\mathrm{aut}(\lambda)}\end{aligned}$$

と定める．ここで $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathrm{Part}(n)$ は $\sum_{i=1}^{n}i\lambda_i=n$ で，

$$s^\lambda=s_1^{\lambda_1}s_2^{\lambda_2}\cdots s_n^{\lambda_n},$$

$$\mathrm{aut}(\lambda)=1^{\lambda_1}\lambda_1!\,2^{\lambda_2}\lambda_2!\cdots n^{\lambda_n}\lambda_n!$$

である．また，$\sigma(\lambda)$ はサイクルタイプが λ の S_n の要素を表し，$\mathrm{fix}(\sigma(\lambda), M(\underline{n}))$ は，作用の固定点の数を表す．このとき，ポリアの定理より

$$Z_M(x, x^2, x^3, \cdots) = \widetilde{\mathrm{gen}}(M, x)$$

となる．また，

$$Z_M(x, 0, 0, \cdots) = \mathrm{gen}(M, x)$$

となっているので，Z_M はこの 2 つの母函数の橋渡しの役割をもつ．

(4-6) species の直和分解

species $M: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ に対して，$M_n: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を，$|A| = n$ のとき $M_n(A) = M(A)$ で，$|A| \neq n$ のとき $M_n(A) = \phi$ と定めると，

$$M = M_0 + M_1 + \cdots + M_n + \cdots$$

と無限和に表せる．さらに細かく分解しようとすると，各 M_n は，対称群 S_n の作用による軌道に分解され，各軌道は X^n/H の形の species と同型となる．ここで H は $S_n = \mathrm{Aut}(\underline{n})$ の部分群で $X^n/H: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ は $|A| \neq n$ のとき，$X^n/H(A) = \phi$ で，$|A| = n$ のとき，$X^n/H(A)$ は，$X^{\underline{n}}(A)$ の上への $\mathrm{Aut}(\underline{n})$ の作用を H に制限して，作用させた H-軌道の集合である．これは S_n/H と同一視できる．例 6 の L については，

$$L_n \cong X^n/\{e\} \cong X^{\underline{n}}$$

である．一方，Aut について見ると，Aut_n は対称群 S_n の共役類の数の species の直和に分解される．このことからも，L と Aut は同型でないことがわかる．また，Graph_n を直和分解したときの軌道にグラフの同型類が対応し，$X^n/G(\Gamma_1) \times X^n/G(\Gamma_2)$ というデカルト積を分解すると，グラフ Γ_1 と Γ_2 の重ね合わせのパターンの同型類に分かれる．

5. 終りに

species については，形式的な差を考えることで，負の係数を含む母函数についても理論が拡張できる（virtual species）．その他，多変数の場合など，圏 $\mathcal{B}$ を別の圏にとって意味のある理論がいくつか作られている（Möbius species など）．また，対称群の表現論や対称関数の理論についても species の立場から見なおされつつある．母函数については，ここで解説した以外にもいろいろな見方や扱いができる．(たとえば[S]などに詳しく書いてある．) 今後の理論の発展を期待して筆を擱かせて頂きたい．

参考文献

[B] C.ベルジュ（野崎昭弘訳）：組合せ論の基礎，サイエンス社 1973.

[H-P] F. Harary-E. M. Palmer: Graphical Enumeration, Academic Press 1973

[J] A. Joyal: Une théorie combinatoire des series formelles, *Advances in Math.* **42** (1981), 1-82.

[P-R] G. Pólya-R. C. Read: Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds, Springer-Verlag 1987

[S] R.スタンレイ（成嶋弘他訳）：数え上げ組合せ論 I，日本評論社 1990.

（なるせ・ひろし，岡山大学・教育学部）