

Equivariant Schubert calculus for cominuscule flag varieties

コミニュスキュール旗多様体の同変シューベルトカリキュラス

成瀬 弘 (岡山大・教育), 池田 岳 (岡山理科大・理)
(Hiroshi Naruse, Takeshi Ikeda)

<http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suugaku/naru/ken/>

2007.09.21 日本数学会年会 (於東北大学) 一般講演

Cominuscule flag variety G/P

例： グラスマン多様体

$$Gr(k, n) = \{V \subset \mathbb{C}^n \mid \mathbb{C} - \text{subspace, } \dim V = k\}$$

$\cup$

$$X_\lambda := \{V \in Gr(k, n) \mid \dim V \cap F_{n-k-\lambda_i+i} \geq i\}$$

シューベルト多様体

ここで、

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad n - k \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0, \lambda \leftrightarrow \text{Young 図形}$$

$$F_m = \langle e_{n-m+1}, \dots, e_n \rangle \subset \mathbb{C}^n \quad \text{標準的 } m \text{ 次元部分空間}$$

点 $p \in X_\lambda$ に対して、(特異点の)重複度 $m_p(X_\lambda)$ が定まる。

Hilbert-Samuel が局所環に対して定義したもので、特に

$$m_p(X_\lambda) = 1 \iff X_\lambda \text{ は点 } p \text{ で非特異 (nonsingular)}$$

$m_p(X_\lambda)$ を、(T -同変コホモロジーを利用して) 組合せ論的に 記述することができる。

$Gr(k, n)$ の場合の (同変) 重複度の記述

$Gr(k, n)$ シューベルト多様体 X_λ は、分割 $\lambda \subset (n - k)^k$ で、
 $Gr(k, n)$ の T -固定点 e_μ も 分割 $\mu \subset (n - k)^k$ で、パラメトライズ
 される。しかも、 $e_\mu \in X_\lambda \iff \mu \supset \lambda$.

励起ヤング図形の集合 $\mathcal{E}_\mu(\lambda)$ を定めて、 $m_{e_\mu}(X_\lambda) = \#\mathcal{E}_\mu(\lambda)$ と
 表せる。(A, C, D 型)

c.f. [Lakshmibai-Raghavan-Sankaran], [Kreiman]

(Gröbner 基底 (standard monomial 基底) の組合せ論的記述)

[I-N 1] $H_T^*(G/P)$ の局所化についての Billey の公式を用いる

例 $n = 5, k = 2, \lambda = (2), \mu = (3, 3)$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & \\ \hline \end{array}, \quad
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & & \\ \hline \end{array}, \quad
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$wt_\mu = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \varepsilon_1 - \varepsilon_4 & \varepsilon_2 - \varepsilon_4 & \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ \hline \varepsilon_1 - \varepsilon_5 & \varepsilon_2 - \varepsilon_5 & \varepsilon_3 - \varepsilon_5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 [X_\lambda]|\mu &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)(\varepsilon_2 - \varepsilon_5) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_5)(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\
 m_{e_\mu}(X_\lambda) &= 3
 \end{aligned}$$

T -同変コホモロジーと重複度

トーラス $T = (\mathbb{C}^*)^N$ が、非特異射影多様体 X に作用していて、 $Y \subset X$ が T -不変な、閉部分多様体とする。また、 $p \in Y$ を、孤立 T -固定点とする。このとき、 $c = \text{codim}_{\mathbb{C}} Y$ として

$[Y] \in H_T^{2c}(X)$ と、 $[Y]|_p := i_p^*([Y]) \in H_T^{2c}(p)$ が定まる。

i_p^* は $i_p : \{p\} \hookrightarrow X$ から誘導される写像 $i_p^* : H_T^*(X) \rightarrow H_T^*(p)$

ここで、 $\hat{T} = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^*) = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}\varepsilon_i$ として、 $H_T^*(p) = \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N]$

$[Y]|_p$ を、点 p における Y の同変重複度という。

さらに条件： T の (p での) 作用が scalar 作用 (dilation) を含む
(i.e. $\exists T_0 \subset T$, $T_0 \simeq \mathbb{C}^*$, $t \leftrightarrow c$ s.t. $\forall v \in T_p(X)$, $t.v = cv$)
ならば、

$$\exists h_p \in \text{Lie}(T) \text{ s.t. } [Y]|_p(h_p) = m_p(Y) \in \mathbb{N}$$

正ルートの集合 R_+ の上の半順序は、 $\alpha, \beta \in R_+$ に対し

$$\alpha \succeq \beta \iff \alpha - \beta \in \sum_j \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j \text{ で定められる。}$$

G/P が cominuscle flag variety であるとは、
 G が半単純代数群、 P は cominuscle な単純ルート α_P に対応した
極大パラボリック部分群 であること。すなわち、 α_P は
 G の最高ルート $\tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \alpha_j$ において、 $\alpha_P = \alpha_i$ の係数が
 $c_i = 1$ となっている。

命題 (A.Knutson の指摘)

G/P が cominuscle なら極大トーラス T の作用は、 $\forall p \in (G/P)^T$
で、scalar 作用を含む。

そこで次の方針を取る： G/P が cominuscle の場合に、正ルートの作る半順序集合の中に ヤング図形にあたるもの D_v を作り、さらに 励起ヤング図形の集合 $\mathcal{E}_v(w)$ を定めて、同変重複度と重複度を記述する。(Billey の公式、fully commutative を使う)

定理 1

$$\text{同変重複度 } [X_w]_v = \sum_{D \in \mathcal{E}_v(w)} wt_v(D), \text{ 重複度 } m_v(X_w) = \# \mathcal{E}_v(w)$$

$v \in W^P := W/W_P$ に対して、 $D_v := \{\alpha \in R_+ \mid v(\alpha) \in R_-\}$ とおく。 $|D_v| = \ell(v)$ となっている。

$v = s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_\ell}$ が v の最短表示のとき、
 $\theta_k := s_{a_\ell}\cdots s_{a_{k+1}}(\alpha_k)$ ($k = 1, \dots, \ell$) とおくと $D_v = \{\theta_1, \dots, \theta_\ell\}$
 $\phi_v : D_v \rightarrow S = \{s_1, \dots, s_r\}$ を、 $\phi_v(\theta_k) = s_{a_k}$ で定める。

補題 (Krařkiewicz)、 α_P を cominuscule な単純ルート、 v_P を W^P の最長元とする。

- 1) $D_{v_P} = \{\alpha \in R_+ \mid \alpha_P \preceq \alpha \preceq \tilde{\alpha}\}$ となり、任意の $v \in W^P$ について D_v は D_{v_P} の順序イデアルとなる。
- 2) $w \leq v \iff D_w \subset D_v$
- 3) 写像 ϕ_v は、 v の最短表示によらない。さらに、 $\phi_v = \phi_{v_P}|_{D_v}$ 。

$\phi = \phi_{v_P} : D_{v_P} \rightarrow S$ とおく。

注意：1) より $\alpha \in D_{v_P}$ なら、 α における α_P 係数は 1

励起ヤング図形の集合 $\mathcal{E}_v(w)$ と重み wt_v の定義

G/P を cominuscule とし、 $D_w \subset D_v$ とする。(すなわち、 $w \leq v$)

$$\mathcal{E}_v(w) := \{D \subset D_v \mid D \text{ は、} D_w \text{ から有限回の基本励起により得られる}\}$$

ここで、 D_1 から D_2 への 基本励起 とは、 D_1, D_2 が次を満たすこと。

1) D_1 と D_2 は要素の数が等しく、1つの元を除いて他は共通、i.e.
 $D_1 - \{c_1\} = D_2 - \{c_2\}$, $c_1 \neq c_2$

2) $\phi(c_1) = \phi(c_2)$ かつ $c_1 \prec c_2$ である。

3) $D_1 - \{c_1\}$ の元 c で、 $c_1 \prec c \prec c_2$ を満たすものがあるときは、 $\phi(c_1) \neq \phi(c)$ で、しかもこれらは可換な単純鏡映である。

$D \in \mathcal{E}_v(w)$ について、 $wt_v(D) := \prod_{\alpha \in D} v(-\alpha)$ で、 wt_v を定める。

このとき、 $[X_w]|_v = \sum_{D \in \mathcal{E}_v(w)} wt_v(D)$, $m_v(X_w) = \#\mathcal{E}_v(w)$ となることが示せる。(定理 1)

例 $A_4/A_1 \times A_2$ 型

$$\begin{array}{c} \vee \\ 1-2-3-4 \end{array}$$

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_3$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_5$
	$\varepsilon_2 - \varepsilon_3$	$\varepsilon_2 - \varepsilon_4$	$\varepsilon_2 - \varepsilon_5$
		$\varepsilon_3 - \varepsilon_4$	$\varepsilon_3 - \varepsilon_5$
			$\varepsilon_4 - \varepsilon_5$

	s_1	s_2	s_3
	s_2	s_3	s_4

$$\alpha_P = \alpha_2, v_P = s_3 s_2 s_1 s_4 s_3 s_2$$

$$\theta_6 = \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

$$\theta_5 = s_2(\alpha_3) = \varepsilon_2 - \varepsilon_4$$

$$\theta_4 = s_2 s_3(\alpha_4) = \varepsilon_1 - \varepsilon_4$$

$$\theta_3 = s_2 s_3 s_4(\alpha_1) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

$$\theta_2 = s_2 s_3 s_4 s_1(\alpha_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_4$$

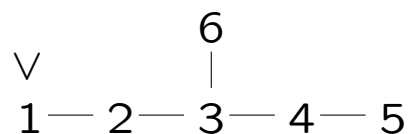
$$\theta_1 = s_2 s_3 s_4 s_1 s_2(\alpha_3) = \varepsilon_1 - \varepsilon_5$$

E_6/D_5 型		$D_{v_P} =$	1, 2, 6, ε	1, 2, 5, ε	1, 2, 4, ε	1, 2, 3, ε	2 ε
			1, 3, 6, ε	1, 3, 5, ε	1, 3, 4, ε		
		1, 5, 6, ε	1, 4, 6, ε	1, 4, 5, ε			
$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_3$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_5$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_6$			

i, j, k, ε で、 $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon$ を表す。

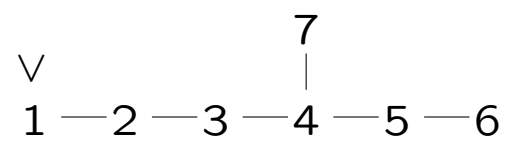
単純ルートは、 $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, 5$, $\alpha_6 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon$.

					1	2	3	4	5
					2	3	6		
				6	3	4			
1	2	3	4	5					



E_7/E_6

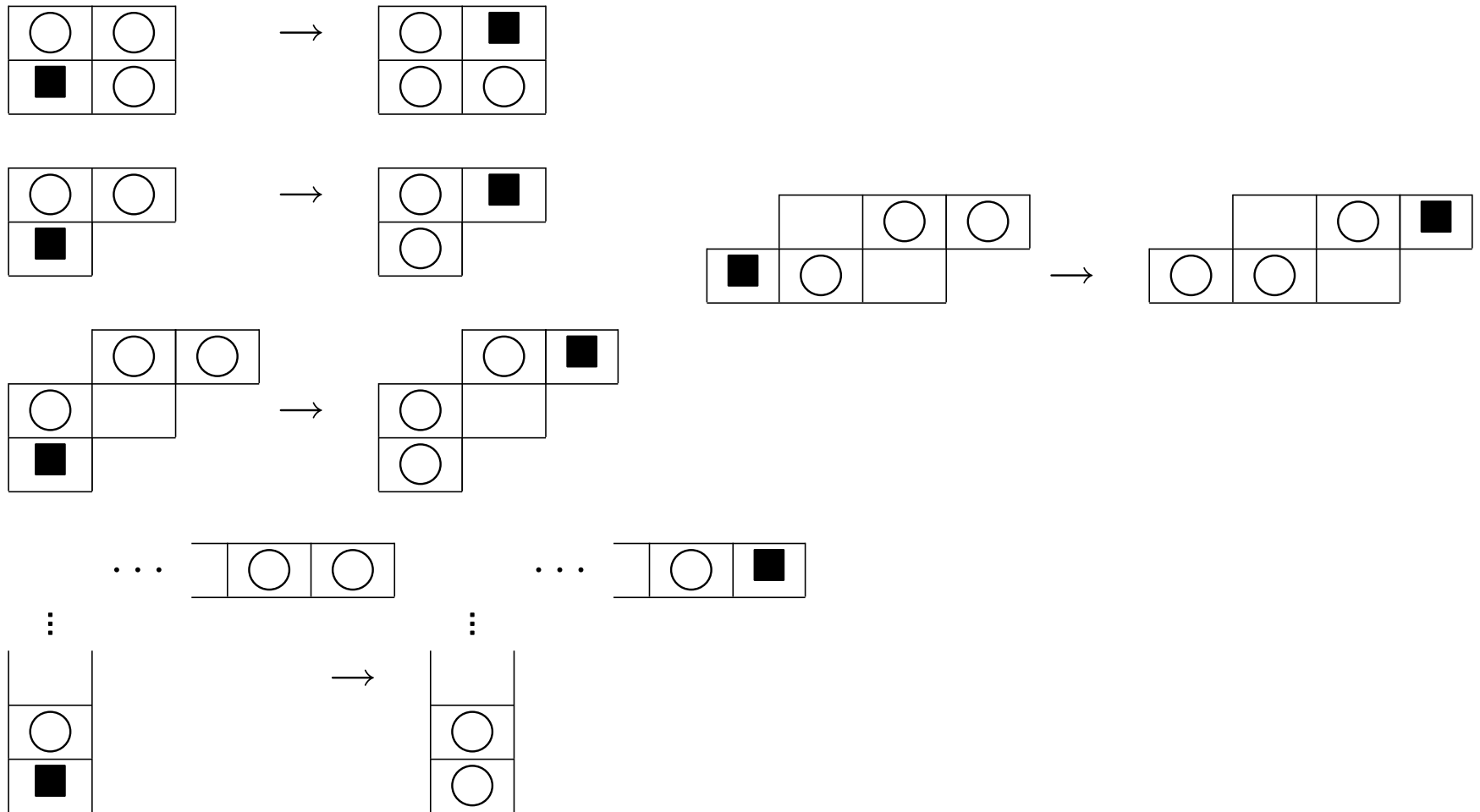
									1
									2
									3
							7	4	
			1	2	3	4	5		
			2	3	4	5	6		
			3	4	7				
			7	4	5				
	1	2	3	4	5	6			



基本励起(elementary excitation)

" ϕ の値を保ち、1つ上位の箱に移動する"

○は、空席を表し、この位置が空席の場合にのみ励起可能

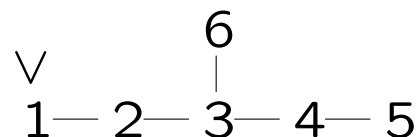


定理 2 G/P が cominuscule で , $w, v \in W^P$ とすると Kazhdan-Lusztig 多項式は , 次の式で表示できる .

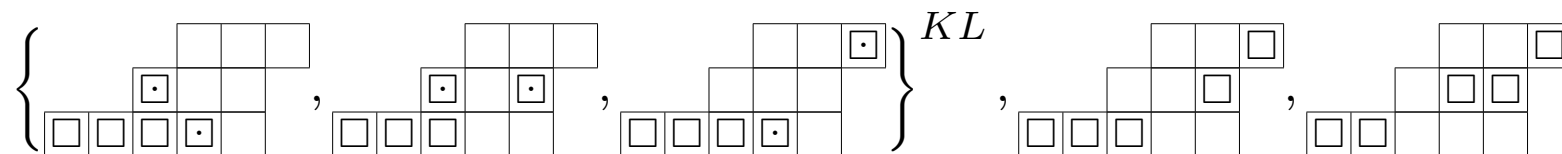
$$Q_{w,v}(q) (= P_{w_0 v, w_0 w}(q)) = \sum_{D \in \mathcal{E}^{KL}(D_w; D_v)} q^{wt'(D)}$$

ここで , $\mathcal{E}^{KL}(D_w; D_v)$ は , $\mathcal{E}(D_w; D_v)$ のある部分集合で , w_0 は W の最長元 . $wt'(D)$ は、 D の特定のセルについての励起エネルギーの総和 . (証明には、K-L 多項式に関する漸化式を用いる)

例 E_6/D_6 , $w = s_6 \cdot s_4 s_3 s_2 s_1$, $v = s_6 s_3 s_2 \cdot s_4 s_3 s_6 \cdot s_5 s_4 s_3 s_2 s_1$.



$\mathcal{E}(D_w; D_v)$ は , 次の 5 つで、そのうち最初の 3 個が $\mathcal{E}^{KL}(D_w; D_v)$



$m_v(X_w) = 5$, $Q_{w,v}(q) = 1 + q + q^2$ となる .