Equivariant Schubert calculus for cominuscule flag varieties

成瀬　弘（岡山大・教育），池田　岳（岡山理科大・理）

我々は既に，Excited Young diagram を用いて，同変コホモロジー環の Schubert class を記述するということを，古典型のグラスマン多様体について行ってきた．c.f [I-N 1]．この手法は，Stembridge の fully commutative element に対応する場合で適用可能であることを既に指摘しているが，今回，cominuscule flag variety に適用した結果がどのように記述されるかについて報告する．あわせて，Excited Young diagram の適当な部分集合を利用することで，この場合に Kazhdan-Lusztig 多項式を記述することができることがわかったのでその事についても説明する．

$G \supset P \supset T$ を連結半単純代数群、パラボリック部分群，極大トーラスとし，$W \supset W_P$ を，G 及び P に対応する Weyl 群とする．このとき，W/W_P の最短代表系 W^P で、G/P の T-固定点 $e(v)$ および Schubert 多様体 X_w が，パラメトライズされる $(v, w \in W^P)$.

同変コホモロジー $H_T^*(G/P)$ の元は、T-固定点での (localization の) 値の組で定まる．Schubert class $[X_w]$ の点 $e(v)$ での制限を $[X_w]|_v$ で表す．これは，ルート α_i 達の多項式となり，同変重複度とも呼ばれ，Kostant-Kumar が定義した ξ^w という W 上の関数の v における値 $\xi^w(v)$ に等しい．一般には，この同変重複度の多項式を特殊化しても古典的重複度が求まるとは限らないが，cominuscule flag variety の場合は、特殊化で古典的重複度が求められることが示せる．(定理１)

W^P のすべての要素が fully commutative となるのは，Stembridge により知られていて，ここで扱う，cominuscule flag variety は，この性質を持ち，次の５つの型に分類される．c.f. [P-S] （compact Hermitian symmetric space に対応.）

1) $A_n/(A_{k-1} \times A_{n-k})$ Grassmannian $G(k, n+1)$
2) B_n/B_{n-1} odd dimensional quadric Q^{2n-1}
3) C_n/A_{n-1} Lagrangian Grassmannian $LG(n)$
4) D_n/D_{n-1} even dimensional quadric Q^{2n-2},
   D_n/A_{n-1} orthogonal Grassmannian $OG(n)$
5) E_6/D_6 Cayley plane $\mathbb{OP}^2$,
   E_7/E_6 (no name) $G_\omega(\mathbb{O}^3, \mathbb{O}^6)$

これらの場合に，$w, v \in W^P$ に対して，Excited Young diagram の集合 $\mathcal{E}(D_w; D_v)$ を定めることができ，基本励起の繰り返しで生成される．また，D_v の各セル (i,j) にはウェイト $wt_{D_v}(i,j)$ が定められて，各 $D \in \mathcal{E}(D_w; D_v)$ に対して、多項式 $wt_T(D; v) = \prod_{(i,j)\in D} wt_{D_v}(i,j)$ が定まる．

定理 1　G/P が cominuscule で，$w, v \in W^P$ とすると以下の等式が成立する．

$$\text{同変重複度} \quad m_T(w)|_v = \sum_{D \in \mathcal{E}(D_w;D_v)} wt_T(D;v)$$

$$\text{古典的重複度} \quad m_v(X_w) = \#\mathcal{E}(D_w;D_v)$$

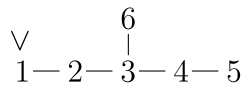
定理 2　G/P が cominuscule で，$w, v \in W^P$ とすると，Kazhdan-Lusztig 多項式は，次の式で表示できる．

$$Q_{w,v}(q)\,(= P_{w_0v,w_0w}(q)) = \sum_{D \in \mathcal{E}^{KL}(D_w;D_v)} q^{wt'(D)}$$

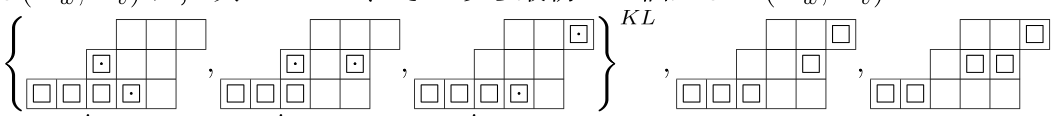
ここで，$\mathcal{E}^{KL}(D_w;D_v)$ は，$\mathcal{E}(D_w;D_v)$ のある部分集合で，w_0 は W の最長元．$wt'(D)$ は、D の特定のセルについての励起エネルギーの総和．

証明には、K-L 多項式に関する漸化式を用いる．

例 E_6/D_6 , $w = s_6{\cdot}s_4s_3s_2s_1$, $v = s_6s_3s_2{\cdot}s_4s_3s_6{\cdot}s_5s_4s_3s_2s_1$.



$\mathcal{E}(D_w;D_v)$ は，次の 5 つで、そのうち最初の 3 個が $\mathcal{E}^{KL}(D_w;D_v)$



$wt' = 0$　　$wt' = 1$　　$wt' = 2$

このとき，$m_v(X_w) = 5$, $Q_{w,v}(q) = 1 + q + q^2$ となる．

参考文献

[Bi] S. Billey, Kostant polynomials and the cohomology ring for G/B. Duke Math. J. 96 (1999), no. 1, 205–224.

[Bo] B.D.Boe, Kazhdan-Lusztig polynomials for Hermitian symmetric spaces, Trans.Amer.Math.Soc. vol.309 (1988), 279–294.

[I-N 1] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, math.AG/0703637.

[I-N 2] T. Ikeda and H. Naruse, Equivariant Schubert calculus for cominuscule flag varieties, (in preparation).

[L-S] A.Lascoux and Schützenberger, Polynôme de Kazhdan et Lusztig pour les grassmanniennes, Astérisque 87–88 (1981), 249–266.

[P-S] K.Prubhoo and F.Sottile, The recursive nature of cominuscule Schubert calculus, math.AG/0607669.

[St] J. R. Stembridge, On the fully commutative elements of Coxeter groups. J. Algebraic Combin. 5 (1996), no. 4, 353–385.