

古典型グラスマン多様体の同変 K -理論における
シューベルト類を代表する多項式について

成瀬 弘 (岡山大・教育), 池田 岳 (岡山理科大・理)
(Hiroshi Naruse, Takeshi Ikeda)

2009.03.29 日本数学会年会 (於東京大学) 一般講演

目標

B, C, D 型のグラスマン多様体 $OG(n, 2n+1)$, $LG(n, 2n)$, $OG(n, 2n)$ について、トーラス同変 K 理論におけるシューベルト類 (シューベルト部分多様体 X^w の構造層 $\mathcal{O}_{X^w}$ の類) を代表する多項式 (**Schur** 関数の変形) を定義してその組合せ論的な表示を求める。

注 1) トーラス同変コホモロジーについては、[I-N] で、factorial Schur P, Q-関数を用いて記述した。

注 2) A 型グラスマン多様体 $Gr(n, n + m)$ については、 K 理論の場合に Buch(2002) が定義した多項式、および、その factorial 類似を組合せ論的に定義した McNamara(2006) による factorial Grothendieck 多項式がある。(但し、その幾何学的な意味については知られていなかった。)

A.Buchの集合値ヤング盤

A型グラスマン多様体 $Gr(n, n+m)$ の K 理論におけるシューベルト類を代表する多項式として A.Buch(2002) は、集合値半標準ヤング盤 (Set-valued semi-standard tableaux) についての総和で表された次の Grothendieck 多項式 を考えた。分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ に対して、

$$\mathcal{G}_{\lambda}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T \in SSSTab(\lambda; n)} (-1)^{|T| - |\lambda|} x^T$$

と定める。

例 $\lambda = (4, 3, 1)$, $n = 6$, $|\lambda| = 8$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1, 2 & 2, 3, 4 & 5 & 5, 6 \\ \hline 3 & 5, 6 & 6 & \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}, \quad |T| = 13, \quad x^T = x_1 x_2^2 x_3^2 x_4 x_5^4 x_6^3.$$

SSSTabとEYD(Excited Young diagram)

例 $\lambda = (4, 3, 1)$, $n = 6$, $\lambda =$

■	■	■	■
■	■	■	
■			

 ■を↘に移動(excite)

$$T =$$

1, <u>2</u>	2, 3, <u>4</u>	<u>5</u>	5, <u>6</u>
<u>3</u>	5, <u>6</u>	<u>6</u>	
<u>5</u>			

$\leftrightarrow D^T =$

1	☐								
2		■	☐						
3		■		☐					
4					■				
5			■		☐		■	☐	
6						■	■		■

$$\mathcal{G}_{\lambda}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{D \in \mathcal{E}(\lambda; n)} Wt_{(-1)}(D)$$

ここで、 $\mathcal{E}(\lambda; n)$ は、 n 行の長方形の枠内のEYD全体の集で、

$$Wt_{(\beta)}(D) := \prod_{(i,j) \in D} x_i \prod_{(p,q) \in B(D)} (1 + \beta x_p)$$

$B(D)$ は、 D の1つの箱を、他をそのままにして逆方向に戻せる位置の全体

定義 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $r \leq n$ に対し、 n 変数の対称多項式を次で定める。

$$\begin{aligned}
G_\lambda^{(n)}(x|b) &:= \sum_{w \in S_n} w \left([x_1|b]^{\lambda_1+n-1} [x_2|b]^{\lambda_2+n-2} \dots [x_n|b]^{\lambda_n} \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i \ominus x_j} \right) \\
GP_\lambda^{(n)}(x|b) &:= \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in S_n} w \left(\prod_{1 \leq i \leq r} \left([x_i|b]^{\lambda_i} \prod_{i < j \leq n} \frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j} \right) \right) \\
GQ_\lambda^{(n)}(x|b) &:= \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in S_n} w \left(\prod_{1 \leq i \leq r} \left([[x_i|b]]^{\lambda_i} \prod_{i < j \leq n} \frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j} \right) \right)
\end{aligned}$$

ここで、 $b = (b_1, b_2, \dots)$ は、(同変)パラメーター。また、

β :不定元, $x \oplus y := x + y + \beta xy$, $x \ominus y := (x - y)/(1 + \beta y)$ と定める。

$$[x|b]^k := (x \oplus b_1)(x \oplus b_2) \cdots (x \oplus b_k), \quad [[x|b]]^k := (x \oplus x)(x \oplus b_1) \cdots (x \oplus b_{k-1})$$

Determinantal, Pfaffian formula

$$G_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \frac{\det \left([x_i|b]^{\lambda_j+n-j} (1 + \beta x_i)^{j-1} \right)_{n \times n}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}$$

$$GP_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \frac{\text{pf} \left(\begin{array}{cc} A_0 & B_{\lambda} \\ -{}^t B_{\lambda} & 0 \end{array} \right)}{\text{pf}(A_0)} \prod_{i=1}^n (1 + \beta x_i)^{\ell}$$

$$GQ_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \frac{\text{pf} \left(\begin{array}{cc} A_0 & B'_{\lambda} \\ -{}^t B'_{\lambda} & 0 \end{array} \right)}{\text{pf}(A_0)} \prod_{i=1}^n (1 + \beta x_i)^{\ell}$$

ここで、

$$A_0 := \left(\frac{x_i - x_j}{x_i \oplus x_j} \right)_{n \times n}, \quad B_{\lambda} = \left([x_i|b]^{\lambda_{\ell+1-j}} (1 + \beta x_i)^{-j} \right)_{n \times \ell}$$

$$\text{and } B'_{\lambda} = \left([[x_i|b]]^{\lambda_{\ell+1-j}} (1 + \beta x_i)^{-j} \right)_{n \times \ell}.$$

Combinatorial formula using set valued semi-standard tableaux

$$G_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \sum_{T \in SSST(\lambda, n)} \beta^{|T| - |\lambda|} \prod_{(i,j) \in \lambda, r \in T(i,j)} (x_r \oplus b_{r+c(i,j)})$$

$$GQ_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \sum_{T \in SMST(\lambda, n)} \beta^{|T| - |\lambda|} \prod_{(i,j) \in \lambda, r \in T(i,j)} (x_{|r|} \oplus \text{sgn}(r) b_{j-i})$$

$$GP_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \sum_{T \in SMST'(\lambda, n)} \beta^{|T| - |\lambda|} \prod_{(i,j) \in \lambda, r \in T(i,j)} (x_{|r|} \oplus \text{sgn}(r) b_{j-i+1})$$

$\text{sgn}(r) = \ominus$ if $r < 0$ and $\text{sgn}(r) = \oplus$ if $r > 0$

ここで、 $SMST(\lambda, n)$ は、set-valued Marked semistandard tableauxの全体

Combinatorial formula using EYD

$$G_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \sum_{D \in \mathcal{E}_n(\lambda)} \prod_{(i,j) \in D} wt_n(i,j) \prod_{(p,q) \in B(D)} (1 + \beta wt_n(p,q))$$

$$GQ_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \sum_{D \in \mathcal{E}_n^I(\lambda)} \prod_{(i,j) \in D} wt_n^I(i,j) \prod_{(p,q) \in B^I(D)} (1 + \beta wt_n^I(p,q))$$

$$GP_{\lambda}^{(n)}(x|b) = \sum_{D \in \mathcal{E}_n^{II}(\lambda)} \prod_{(i,j) \in D} wt_n^{II}(i,j) \prod_{(p,q) \in B^{II}(D)} (1 + \beta wt_n^{II}(p,q))$$

$$wt_n(i,j) = x_i \oplus b_j$$

$$\begin{aligned} wt_n^I(i,j) &= x_i \oplus x_j && \text{if } j \leq n \\ &= x_i \oplus b_{j-n} && \text{if } j > n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} wt_n^{II}(i,j) &= x_i \oplus x_{j+1} && \text{if } j \leq n-1 \\ &= x_i \oplus b_{j+1-n} && \text{if } j \geq n \end{aligned}$$

β -supersymmetric 多項式

$F(x) \in A[\beta][x_1, \dots, x_n]$ が、 β -supersymmetric 多項式であるとは、

1) $F(x)$ は、 $x_1, \dots, x_n$ について、対称式である。

2) 任意の $1 \leq i < j \leq n$ 対して、 $F(x)|_{x_i=t, x_j=\ominus t}$ は、 t によらない。
ただし、 $\ominus t = -t/(1 + \beta t)$ 。

例) $GP_1^{(n)}(x|b) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ は、 β -supersymmetric

一般に、 $GP_\lambda^{(n)}(x|b), GQ_\lambda^{(n)}(x|b)$ は、 β -supersymmetric である。

$SS_\beta^{(n)}$ を、 $\mathbb{Z}[\beta][x_1, \dots, x_n]$ の中で β -supersymmetric 多項式全体
が作る部分環とする。

SP_n を、長さ n 以下の strict partition 全体の集合とする

i.e. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, s.t. $\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0$, $r \leq n$

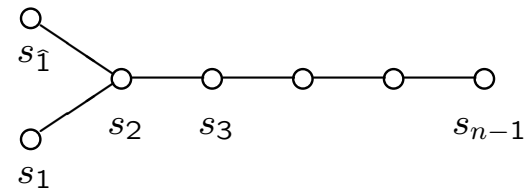
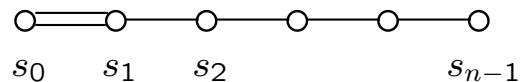
命題 $\left\{ GP_\lambda^{(n)}(x|0) \right\}_{\lambda \in SP_n}$ は、 $SS_\beta^{(n)}$ の $\mathbb{Z}[\beta]$ -基底となる。

係数環 $R_\beta^{(n)}$ と Weyl 群の作用

$$R_\beta^{(n)} := \mathbb{Z}[\beta][b_1, \dots, b_n, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n] / \langle b_i \oplus \bar{b}_i \rangle_{i=1, \dots, n}.$$

$$b_i = \frac{e^{-\beta t_i} - 1}{\beta}, \quad \bar{b}_i = \frac{e^{\beta t_i} - 1}{\beta}$$

$$W(B_n) = W(C_n) = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle \supset W(D_n) = \langle s_{\hat{1}}, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$$



s_i ($1 \leq i \leq n-1$) は、 $b_i \leftrightarrow b_{i+1}$, $\bar{b}_i \leftrightarrow \bar{b}_{i+1}$ で、他の変数を固定

s_0 は、 $b_1 \leftrightarrow \bar{b}_1$, $s_{\hat{1}} := s_0 s_1 s_0$, $b_1 \leftrightarrow \bar{b}_2$, $b_2 \leftrightarrow \bar{b}_1$

$R_\beta^{(n)} \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} SS_\beta^{(n)}$ 上にも $W(B_n) = W(C_n) = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ が作用する。

s_i ($1 \leq i \leq n-1$) は、 $SS_\beta^{(n)}$ には自明に作用

$F(x) \in SS_\beta^{(n)}$ に対して、

$$s_0 F := F(b_1, x_1, \dots, x_n) \in R_\beta^{(n)} \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} SS_\beta^{(n)}$$

$$s_{\hat{1}} F := F(b_1, b_2, x_1, \dots, x_n) \in R_\beta^{(n)} \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} SS_\beta^{(n)}.$$

(left) divided-difference 作用素

$$\pi_i(F) = \frac{F - (1 + \beta b(\alpha_i)) s_i F}{b(\alpha_i)}, \quad F \in R_\beta^{(n)} \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} SS_\beta^{(n)}$$

$$b(\alpha_i) = b_i \ominus b_{i+1} \quad (1 \leq i)$$

$$b(\alpha_0^B) = \ominus b_1, \quad b(\alpha_0^C) = \ominus(b_1 \oplus b_1), \quad b(\alpha_{\hat{1}}) = \ominus(b_1 \oplus b_2)$$

”局所化写像”と”局所化”における (left) divided-difference

$$R_\beta := \mathbb{Z}[\beta][b_1, b_2, \dots, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots] / \langle b_i \oplus \bar{b}_i \rangle, \quad SS_\beta := \varprojlim_n SS_\beta^{(n)}$$

$$R_\beta\text{-linear map } \Phi : R_\beta \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} SS_\beta \rightarrow \prod_{v \in W_\infty^{Gr X}} (R_\beta)_v : \text{単射}$$

$$\eta = (\eta|_v)_v \in (\prod_v R_\beta)^{GKM_X} \text{ に対して、(ただし、 } X = B, C, D)$$

$$\pi_i^X(\eta)|_v := \frac{\eta|_v - (1 + \beta b^X(\alpha_i))\eta|_{s_i v}}{b^X(\alpha_i)}$$

ここで、Goresky-Kottwitz-MacPherson (GKM_X) 条件とは、

$$\eta|_v - \eta|_{s_\alpha v} \text{ は } b^X(\alpha) \text{ で割り切れる } \forall \alpha \in R_X^+ : \text{ 正ルート}$$

命題 Φ は、 π_i と可換になっている。

”シューベルト類”

$\eta^w = (\eta^w)_{w \in Gr_\infty^X}$, $\eta^w \in (\prod_{v \in Gr_\infty^X} (R_\beta)_v)^{GKM_X}$ という族で,

$$\begin{aligned} 1) \quad & \eta^w|_e = \delta_{w,e} \\ 2) \quad & \pi_i^X(\eta^w) = \begin{cases} \eta^{s_i w} & \text{if } s_i w < w \\ (-\beta)\eta^w & \text{if } s_i w > w \end{cases} \end{aligned}$$

を満たすものが ($\ell(w)$ と $\ell(v)$ に関し) 帰納的に, 唯一通り定まる。

漸化式は, $v \neq e$ に対して $s_i v < v$ となる s_i を見つけて,

$$s_i w < w \text{ のとき } \eta^w|_v = (1 + \beta b(\alpha_i))s_i(\eta^w|_{s_i v}) + b(\alpha_i)\eta^{s_i w}|_v$$

$$s_i w > w \text{ のとき } \eta^w|_v = s_i(\eta^w|_{s_i v})$$

命題 $\{GP_\lambda(x|0, b)\}_{\lambda \in SP}$, $\{GQ_\lambda(x|b)\}_{\lambda \in SP}$, $\{GP_\lambda(x|b)\}_{\lambda \in SP}$ の中による像は、 $X = B, C, D$ のときの上記の性質 1), 2) を持つ。

まとめと課題

- ・古典型 (A, B, C, D) の (極大) グラスマン多様体の T 同変 K -理論におけるシューベルト類を代表する多項式を定義することができた。
- ・手法としては、 T 固定点への局所化と、divided-difference 作用素を用いた。
- ・これを用いて、古典型 (A, B, C, D) の 旗多様体 の T 同変 K -理論におけるシューベルト類を代表する多項式を作ることができる。
- ・構造定数については、未解決。(難しい)
- ・量子同変 K 理論でのシューベルト類を表す多項式も作れる可能性がある。(A 型の場合は、Lenart-Maeno の結果)