古典型グラスマン多様体の同変K-理論における シューベルト類を代表する多項式について

成瀬　弘（岡山大・教育），池田　岳（岡山理科大・理）

B,C,D 型の古典型のグラスマン多様体の通常のコホモロジー環におけるシューベルト基底は、Schur の P-,Q-関数で代表される．同変コホモロジー環の場合は，V.N.Ivanov が定義した、factorial Schur P-,Q-関数 [Iv] がシューベルト基底を代表する (cf. [I-N])．ここでは、この多項式の同変 K-理論版 (factorial Grothendieck Schur P-,Q-関数と呼ぶべきもの) を定義し、その組合せ論的な性質を記述する．A 型の場合は，McNamara[Mc] によって factorial Grothendieck 多項式が定義されているが，これも並行して扱うことで新たな組合せ論的性質が得られる．

コホモロジーと K-理論を同時に扱えるようにするため，不定元 β を導入し、演算 $\oplus$ を $x \oplus y = x + y + \beta xy$ で定める。($\beta = 0$ のときコホモロジー，$\beta = -1$ のとき K-理論) この演算に関する x の逆元は、$\ominus x = \frac{-x}{1+\beta x}$ となる。また，パラメータ $b_1, b_2, ...$ を用いて x の β-factorial k 乗を 2 通り、次で定める．

$[x|b]^k := (x \oplus b_1)(x \oplus b_2) \cdots (x \oplus b_k)$

$[[x|b]]^k := (x \oplus x)(x \oplus b_1) \cdots (x \oplus b_{k-1})$

定義　$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ を長さ r の分割 ($r \leq n$) とする．このとき $x = (x_1, ..., x_n)$ の対称関数を次で定める．(w は，$x_1, ..., x_n$ の置換で作用)

$$\begin{aligned}
G_\lambda^{(n)}(x|b) &:= \frac{1}{(n-r)!}\sum_{w\in S_n} w\left(\prod_{1\leq i\leq r}\left([x_i|b]^{\lambda_i}\prod_{i<j\leq n}\frac{x_i}{x_i\ominus x_j}\right)\right)\\
GP_\lambda^{(n)}(x|b) &:= \frac{1}{(n-r)!}\sum_{w\in S_n} w\left(\prod_{1\leq i\leq r}\left([x_i|b]^{\lambda_i}\prod_{i<j\leq n}\frac{x_i\oplus x_j}{x_i\ominus x_j}\right)\right)\\
GQ_\lambda^{(n)}(x|b) &:= \frac{1}{(n-r)!}\sum_{w\in S_n} w\left(\prod_{1\leq i\leq r}\left([[x_i|b]]^{\lambda_i}\prod_{i<j\leq n}\frac{x_i\oplus x_j}{x_i\ominus x_j}\right)\right)
\end{aligned}$$

注意 1. $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ となる i が存在してもよい．このとき，$GP_\lambda^{(n)}(x|b)$ は，一般には 0 とはならない．

注意 2. より一般に，Hall-Littlewood 関数の β-factorial 版も定義できる．これについては，パラメータを特殊化すると複素鏡映群のシューベルト類を代表していることが期待されるが，確認は出来ていない．

定理 1 *(励起ヤング図形を用いた表示)*

$$G_\lambda^{(n)}(x|b) = \sum_{D\in\mathcal{E}_n(\lambda)} \prod_{(i,j)\in D} wt_n(i,j) \prod_{(p,q)\in B(D)} (1+\beta wt_n(p,q))$$

$$GQ_\lambda^{(n)}(x|b) = \sum_{D\in\mathcal{E}_n^I(\lambda)} \prod_{(i,j)\in D} wt_n^I(i,j) \prod_{(p,q)\in B^I(D)} (1+\beta wt_n^I(p,q))$$

$$GP_\lambda^{(n)}(x|b) = \sum_{D\in\mathcal{E}_n^{II}(\lambda)} \prod_{(i,j)\in D} wt_n^{II}(i,j) \prod_{(p,q)\in B^{II}(D)} (1+\beta wt_n^{II}(p,q))$$

ここで，$\mathcal{E}_n(\lambda), \mathcal{E}_n^I(\lambda), \mathcal{E}_n^{II}(\lambda)$ は，分割 λ に対する n 行の枠内の励起ヤング図形の集合を表す．*(cf. [I-N])* 但し，第２式，第３式では $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0$ とする．また，重みは

$$wt_n(i,j) = x_i \oplus b_j,$$

$$wt_n^I(i,j) = \begin{cases} x_i \oplus x_j & \text{if} \quad j \le n \\ x_i \oplus b_{j-n} & \text{if} \quad j > n \end{cases}, \quad wt_n^{II}(i,j) = \begin{cases} x_i \oplus x_{j+1} & \text{if} \quad j < n \\ x_i \oplus b_{j-n+1} & \text{if} \quad j \ge n \end{cases}$$

$B(D), B^I(D), B^{II}(D)$ は，D の *1* つのセルが他を残して逆励起できるときの行き先のセル全体の集合を表す．

例　$n=2$, $\lambda=(3,1)$ のとき，$\mathcal{E}_2^I(\lambda)$ は２個で，それらと各セルの重みは次の通り．白抜きの正方形は $B^I(D)$ の元を表す．

■	■	■	
	■		

■	■	□	
	■		■

$x_1 \oplus x_1$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus b_1$	$x_1 \oplus b_2$
	$x_2 \oplus x_2$	$x_2 \oplus b_1$	$x_2 \oplus b_2$

これから，$GQ_{21}^{(2)}(x|b) = (x_1\oplus x_1)(x_1\oplus x_2)(x_2\oplus x_2)(x_1\oplus b_1)$

$$+(x_1\oplus x_1)(x_1\oplus x_2)(x_2\oplus x_2)(x_2\oplus b_2)(1+\beta x_1\oplus b_1).$$

定理を証明するために，isobaric divided difference および同変 K-理論の局所化の類似物を考える．定義の $GP_\lambda(x|b), GQ_\lambda(x|b)$ と，励起ヤング図形で定められる関数が共通の性質をもつことから同一性が導かれる．

参考文献

[I-N] Ikeda, T. and Naruse, H., Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, preprint. arXiv:0703637. to appear Trans. Amer. Math. Soc.

[Iv] Ivanov, V. N., Interpolation analogue of Schur Q-functions, *Zap. Nauc. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov.* **307** (2004), 99-119.

[Mc] McNamara,P. Factorial Grothendieck Polynomials, Elec. J. Comb. 13(2006),#R71.