

Excited Young diagram と Yang-Baxter 関係式

成瀬 弘

平成 23 年 9 月 28 日

励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)

- ウェイトの同値変形

- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式

- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式

- 基本変形から同値変形へ

- skew shape

- coproduct

- pipedream

$\lambda = (3, 2)$ のとき、

$\square$	$\square$	$\square$			
$\square$	$\square$				

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

励起ヤング図形とは

● 励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (3, 2)$ のとき、

$\square$	$\square$	$\square$			
$\square$	$\square$				

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$D =$

$\square$	$\square$	$\square$			
$\square$	$\square$				

$$x^{w(D)} = x_1^3 x_2^2$$

$$x_1^3 x_2^2 +$$

励起ヤング図形とは

● 励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (3, 2)$ のとき、

□	□	□			
□	□				

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$D =$

	□	□			
	□	□		□	

$$x^{w(D)} = x_1^2 x_2^3$$

$$x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 +$$

励起ヤング図形とは

● 励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (3, 2)$ のとき、

□	□	□			
□	□				

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$D =$

	□	□			
□			□		
		□			

$$x^{w(D)} = x_1^2 x_2^2 x_3$$

$$x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 +$$

励起ヤング図形とは

● 励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (3, 2)$ のとき、

☐	☐	☐			
☐	☐				

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$D =$

☐	☐				
☐			☐		
			☐		

$$x^{w(D)} = x_1^2 x_2^2 x_4$$

$$x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_4 +$$

励起ヤング図形とは

● 励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (3, 2)$ のとき、

□	□	□			
□	□				

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$D =$

	□	□			
			□		
		□			
			□		

$$x^{w(D)} = x_1^2 x_2 x_3 x_4$$

$$x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 x_4 +$$

励起ヤング図形とは

● 励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (3, 2)$ のとき、

□	□	□			
□	□				

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$D =$

	□				
			□	□	
		□			
				□	

$$x^{w(D)} = x_1 x_2^2 x_3 x_4$$

$$x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2^2 x_3 x_4 +$$

励起ヤング図形とは

● 励起ヤング図形とは

- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (3, 2)$ のとき、

$\square$	$\square$	$\square$			
$\square$	$\square$				

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

シュアー関数

$$s_{32}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2^2 x_3 x_4 + \dots + x_3^2 x_4^3$$

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{D \in \mathcal{E}_n(\lambda)} x^{w(D)}$$

励起ヤング図形とは (K -theory 版)

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$\text{Grothendieck polynomial } G_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \sum_{D \in \mathcal{E}_n(\lambda)} Wt_\beta(D),$$

$$Wt_\beta(D) := x^{w(D)} \prod_{b \in \mathcal{B}(D)} (1 + \beta x^{w(b)})$$

☐	☐	☐				x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
☐	☐					x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
						x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
						x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

励起ヤング図形とは (K -theory 版)

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$\text{Grothendieck polynomial } G_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \sum_{D \in \mathcal{E}_n(\lambda)} Wt_\beta(D),$$

$$Wt_\beta(D) := x^{w(D)} \prod_{b \in \mathcal{B}(D)} (1 + \beta x^{w(b)})$$

☐	☐	☐				x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
☐	☐					x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
						x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
						x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

☐					
☐		☐			
			☐		☐

$$x_1 x_2^2 x_4^2$$

励起ヤング図形とは (K -theory 版)

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$\text{Grothendieck polynomial } G_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \sum_{D \in \mathcal{E}_n(\lambda)} Wt_\beta(D),$$

$$Wt_\beta(D) := x^{w(D)} \prod_{b \in \mathcal{B}(D)} (1 + \beta x^{w(b)})$$

☐	☐	☐				x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
☐	☐					x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
						x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
						x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

☐	b				
☐		☐	b		
		b		b	
			☐		☐

$$x_1 x_2^2 x_4^2 (1 + \beta x_1)(1 + \beta x_2)(1 + \beta x_3)^2$$

励起ヤング図形とは (K -theory 版)

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$\text{Grothendieck polynomial } G_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \sum_{D \in \mathcal{E}_n(\lambda)} Wt_\beta(D),$$

$$Wt_\beta(D) := x^{w(D)} \prod_{b \in \mathcal{B}(D)} (1 + \beta x^{w(b)})$$

$\square$	$\square$	$\square$				x_1	x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
$\square$	$\square$					x_2	x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
						x_3	x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
						x_4	x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

セルのウェイトを下記のようになると、factorial Grothendieck polynomial になる。ここで、 $x \oplus y = x + y + \beta xy$

$x_1 \oplus b_1$	$x_1 \oplus b_2$	$x_1 \oplus b_3$	$x_1 \oplus b_4$	$x_1 \oplus b_5$	$x_1 \oplus b_6$
$x_2 \oplus b_1$	$x_2 \oplus b_2$	$x_2 \oplus b_3$	$x_2 \oplus b_4$	$x_2 \oplus b_5$	$x_2 \oplus b_6$
$x_3 \oplus b_1$	$x_3 \oplus b_2$	$x_3 \oplus b_3$	$x_3 \oplus b_4$	$x_3 \oplus b_5$	$x_3 \oplus b_6$
$x_4 \oplus b_1$	$x_4 \oplus b_2$	$x_4 \oplus b_3$	$x_4 \oplus b_4$	$x_4 \oplus b_5$	$x_4 \oplus b_6$

ウェイトの同値変形

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$x \oplus b_1$	$x \oplus b_2$	$x \oplus b_3$	$x \oplus b_4$	$x \oplus b_5$	0
0	$y \oplus b_2$	$y \oplus b_3$	$y \oplus b_4$	$y \oplus b_5$	$y \oplus b_6$



$y \oplus b_1$	$y \oplus b_2$	$y \oplus b_3$	$y \oplus b_4$	$y \oplus b_5$	0
0	$x \oplus b_2$	$x \oplus b_3$	$x \oplus b_4$	$x \oplus b_5$	$x \oplus b_6$

ウェイトの同値変形

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$x \oplus b_1$	$x \oplus b_2$	$x \oplus b_3$	$x \oplus b_4$	$x \oplus b_5$	0
0	$y \oplus b_2$	$y \oplus b_3$	$y \oplus b_4$	$y \oplus b_5$	$y \oplus b_6$



$y \oplus b_1$	$y \oplus b_2$	$y \oplus b_3$	$y \oplus b_4$	$y \oplus b_5$	0
0	$x \oplus b_2$	$x \oplus b_3$	$x \oplus b_4$	$x \oplus b_5$	$x \oplus b_6$

$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6



b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	0
0	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	$a \oplus b_6$

ウェイトの同値変形

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$x \oplus b_1$	$x \oplus b_2$	$x \oplus b_3$	$x \oplus b_4$	$x \oplus b_5$	0
0	$y \oplus b_2$	$y \oplus b_3$	$y \oplus b_4$	$y \oplus b_5$	$y \oplus b_6$



$y \oplus b_1$	$y \oplus b_2$	$y \oplus b_3$	$y \oplus b_4$	$y \oplus b_5$	0
0	$x \oplus b_2$	$x \oplus b_3$	$x \oplus b_4$	$x \oplus b_5$	$x \oplus b_6$

$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6



b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	0
0	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	$a \oplus b_6$

$a = x \ominus y, b_i = y \oplus b_i$ とすれば、上の場合に一致する。
 ここで、 $x \ominus y = \frac{x-y}{1+\beta y}$

Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

生成元 $u_0, u_1, \dots$, 不定元 β , 関係式は、次の通り。

$$u_i^2 = \beta u_i$$

$$u_i u_j = u_j u_i \quad (|i - j| \geq 2)$$

$$u_i u_{i+1} u_i = u_{i+1} u_i u_{i+1} \quad (i \geq 1)$$

$$u_0 u_1 u_0 u_1 = u_1 u_0 u_1 u_0$$

Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

生成元 $u_0, u_1, \dots$, 不定元 β , 関係式は、次の通り。

$$u_i^2 = \beta u_i$$

$$u_i u_j = u_j u_i \quad (|i - j| \geq 2)$$

$$u_i u_{i+1} u_i = u_{i+1} u_i u_{i+1} \quad (i \geq 1)$$

$$u_0 u_1 u_0 u_1 = u_1 u_0 u_1 u_0$$

$h_i(x) = 1 + x u_i$ とおくと、

$$h_i(x) h_i(y) = h_i(y) h_i(x) = h_i(x \oplus y)$$

$$h_i(x) h_j(y) = h_j(y) h_i(x) \quad (|i - j| \geq 2)$$

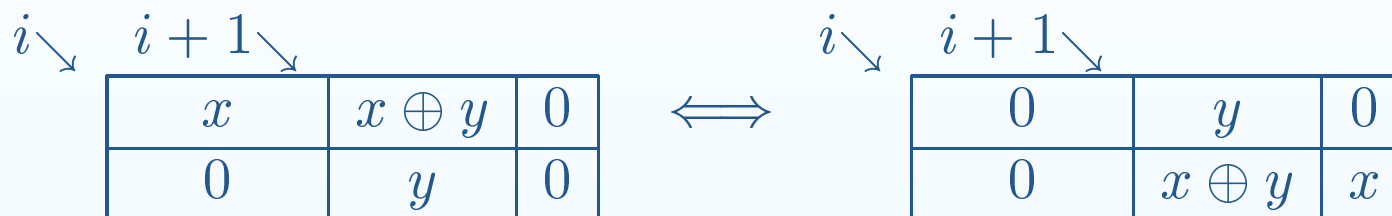
$$h_i(x) h_{i+1}(x \oplus y) h_i(y) = h_{i+1}(y) h_i(x \oplus y) h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$

$$\begin{aligned} h_0(x) h_1(x \oplus y) h_0(x \oplus y \oplus y) h_1(y) \\ = h_1(y) h_0(x \oplus y \oplus y) h_1(x \oplus y) h_0(x) \end{aligned}$$

基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

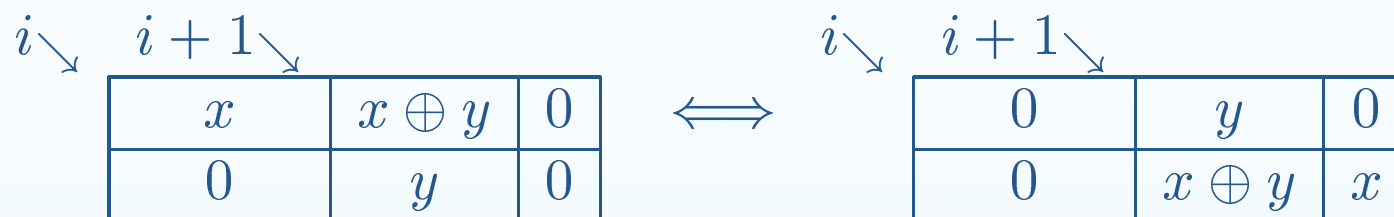
$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



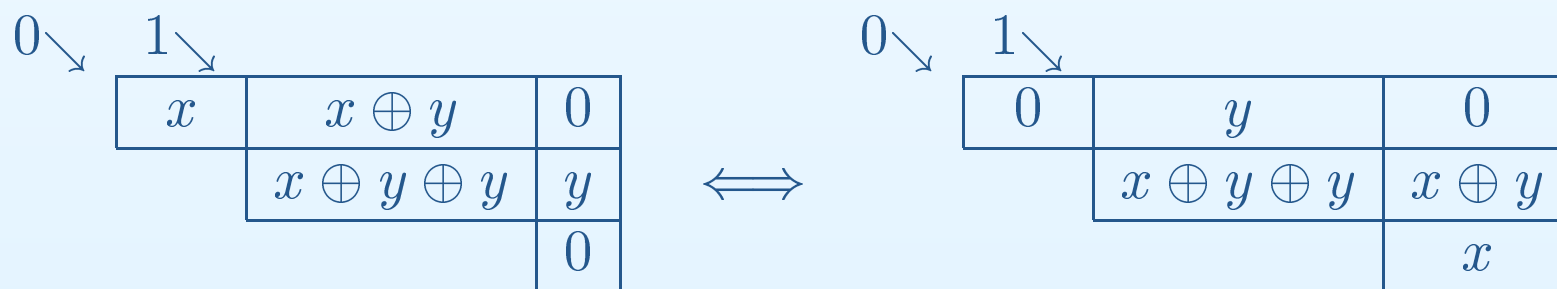
基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



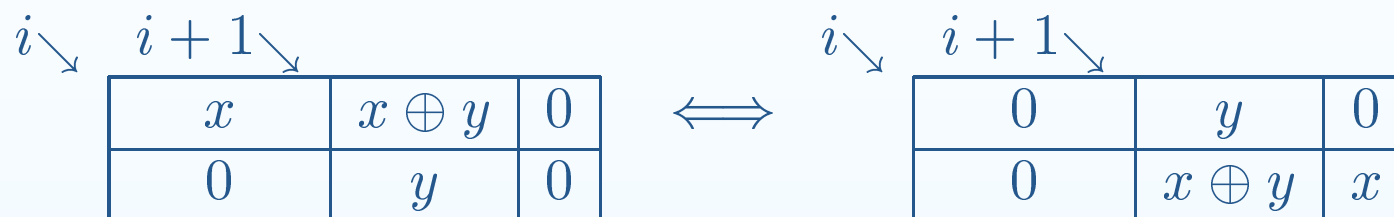
$$h_0(x)h_1(x \oplus y)h_0(x \oplus y \oplus y)h_1(y) = h_1(y)h_0(x \oplus y \oplus y)h_1(x \oplus y)h_0(x)$$



基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$

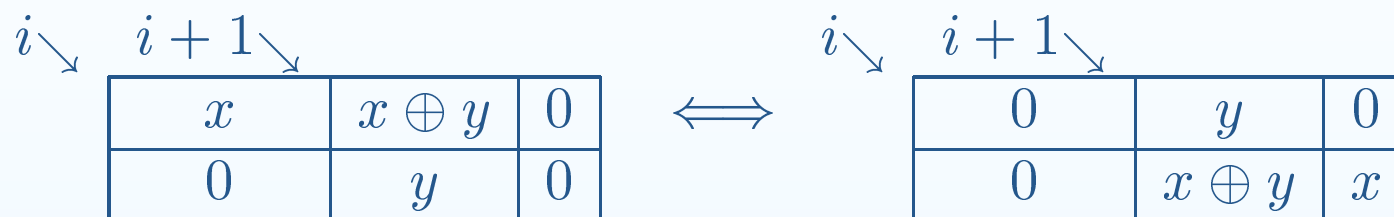


$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



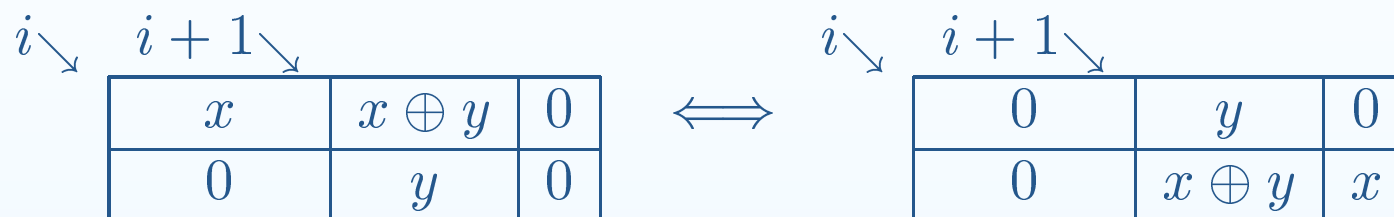
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	0						
0	a	$a \oplus b_2$	0				
	0	b_2	0	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
			0	b_3	b_4	b_5	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



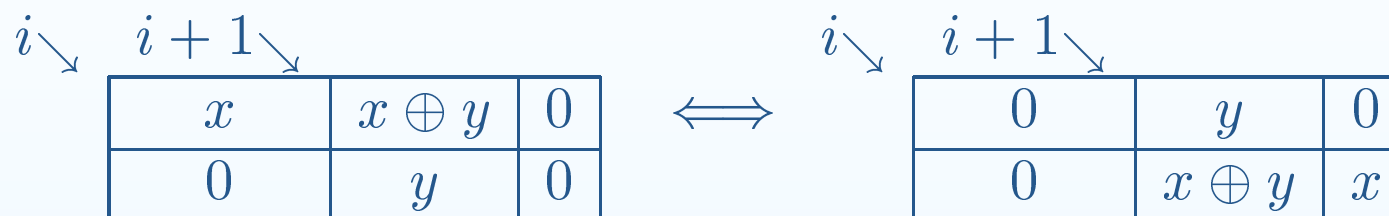
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	0						
	0	b_2	0				
	0	$a \oplus b_2$	a	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
			0	b_3	b_4	b_5	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



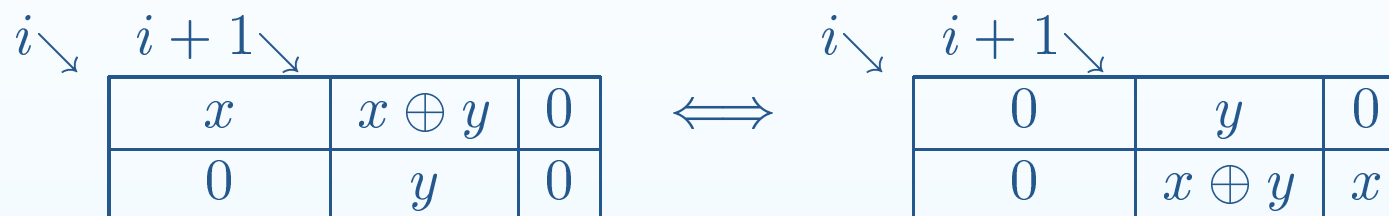
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	b_2	0					
0	$a \oplus b_2$	a	$a \oplus b_3$	0			
		0	b_3	0	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
				0	b_4	b_5	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



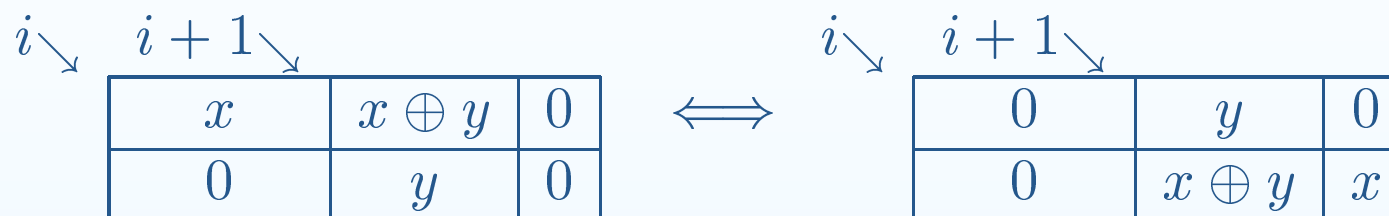
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	b_2	0					
0	$a \oplus b_2$	0	b_3	0			
		0	$a \oplus b_3$	a	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
				0	b_4	b_5	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



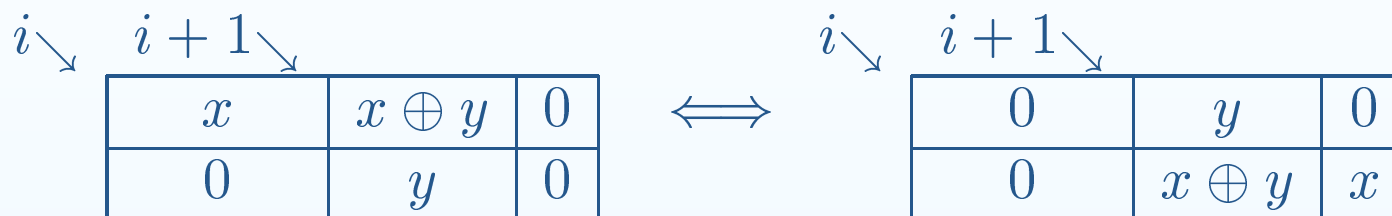
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	b_2	b_3	0					
0	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	a	$a \oplus b_4$	0			
			0	b_4	0	$a \oplus b_5$	0	
					0	b_5	b_6	

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



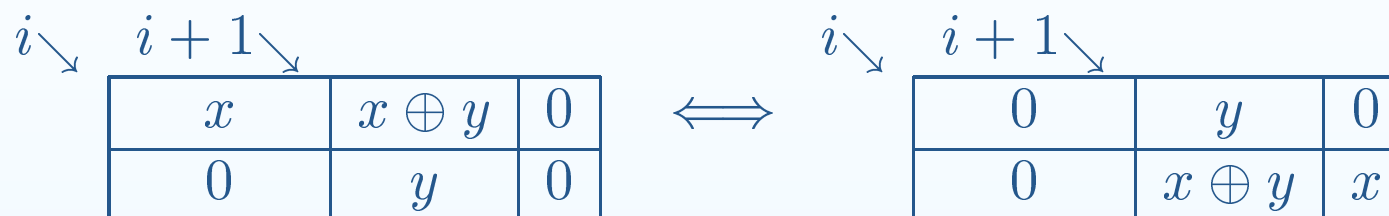
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	b_2	b_3	0			
0	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	0	b_4	0	
			0	$a \oplus b_4$	a	$a \oplus b_5$
				0	b_5	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



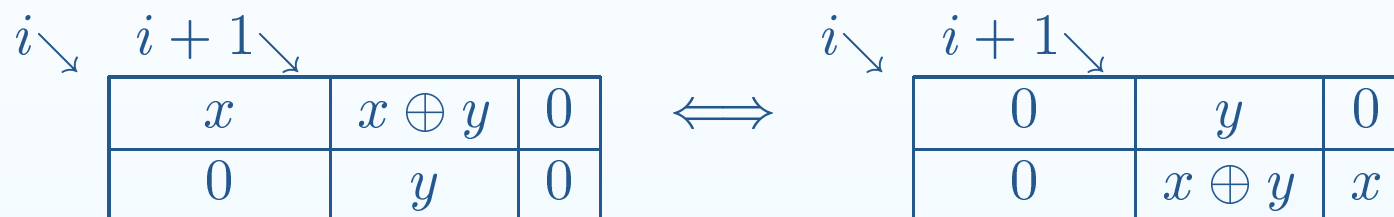
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	b_2	b_3	b_4	0			
0	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	a	$a \oplus b_5$	0	
				0	b_5	0	0
						0	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



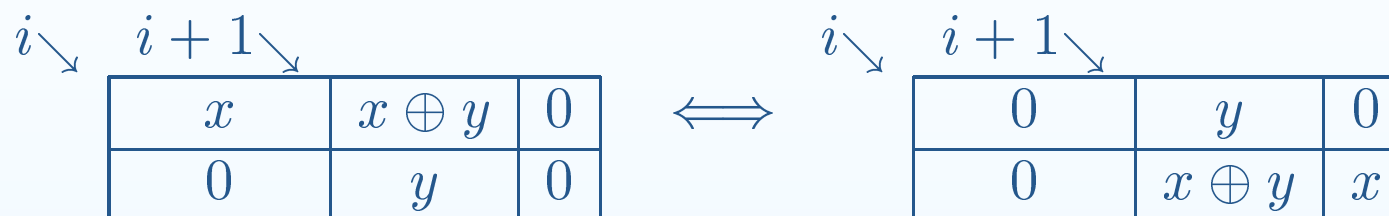
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	b_2	b_3	b_4	0		
0	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	0	b_5	0
				0	$a \oplus b_5$	a
					0	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



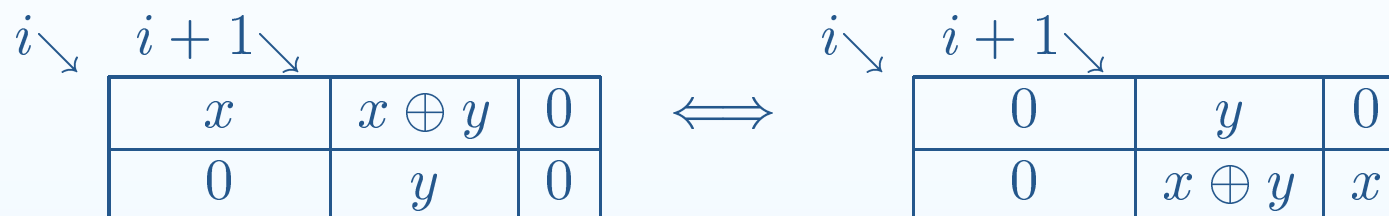
$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	0	
0	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	a	0
					0	b_6

基本変形から同値変形へ

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$$h_i(x)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(y) = h_{i+1}(y)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(x) \quad (i \geq 1)$$



$a \oplus b_1$	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	0
0	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6



b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	0
0	$a \oplus b_2$	$a \oplus b_3$	$a \oplus b_4$	$a \oplus b_5$	$a \oplus b_6$

skew shape

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (2, 2, 1) \supset \mu = (1)$, skew シューア関数 $s_{\lambda/\mu}(x)$

		□		
	□	□		
	□			

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

skew shape

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

$\lambda = (2, 2, 1) \supset \mu = (1)$, skew シューア関数 $s_{\lambda/\mu}(x)$

		□		
	□	□		
	□			

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$D =$

		□		
	□	□		
	□			

$$w(D) = x_1 x_2^2 x_3$$

$D =$

□		□		
		□		
	□			

$$w(D) = x_1^2 x_2 x_3$$

skew shape

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ

- skew shape

- coproduct

- pipedream

$\lambda = (2, 2, 1) \supset \mu = (1)$, skew シューア関数 $s_{\lambda/\mu}(x)$

		□		
	□	□		
	□			

x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_2	x_2	x_2	x_2
x_3	x_3	x_3	x_3	x_3
x_4	x_4	x_4	x_4	x_4

$D =$

		□		
	□	□		
	□			

$$w(D) = x_1 x_2^2 x_3$$

$D =$

□		□		
		□		
	□			

$$w(D) = x_1^2 x_2 x_3$$

$$s_{(2,2,1)/(1)}(x) = s_{(1,1)}(x)^2 - s_{(1,1,1,1)}(x)$$

coproduct

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- **coproduct**
- pipedream

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
x_1	x_2	x_3				
x_1	x_2	x_3				
$x_1 \oplus x_1$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_3$	x_1	x_1	x_1	$\dots$
	$x_2 \oplus x_2$	$x_2 \oplus x_3$	x_2	x_2	x_2	$\dots$
		$x_3 \oplus x_3$	x_3	x_3	x_3	$\dots$

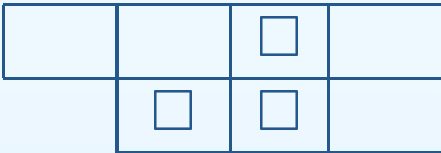
λ/μ shifted skew diagram, e.g. $(3, 2)/(2) =$

$$GQ_{\lambda/\mu}(x) := \sum_{D \in \mathcal{E}(\lambda/\mu)} x^{w(D)} \prod_{b \in \mathcal{B}(D)} (1 + \beta x^{w(b)})$$

coproduct

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- **coproduct**
- pipedream

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
x_1	x_2	x_3				
x_1	x_2	x_3				
$x_1 \oplus x_1$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_3$	x_1	x_1	x_1	$\cdots$
	$x_2 \oplus x_2$	$x_2 \oplus x_3$	x_2	x_2	x_2	$\cdots$
		$x_3 \oplus x_3$	x_3	x_3	x_3	$\cdots$

λ/μ shifted skew diagram, e.g. $(3, 2)/(2) =$ 

$$GQ_{\lambda/\mu}(x) := \sum_{D \in \mathcal{E}(\lambda/\mu)} x^{w(D)} \prod_{b \in \mathcal{B}(D)} (1 + \beta x^{w(b)})$$

$$\Delta(GQ_{\lambda/\mu}(x)) = \sum_{\substack{\nu/\nu' \text{ rook} \\ \lambda \supset \nu \supset \nu' \supset \mu}} \beta^{|\nu/\nu'|} GQ_{\lambda/\nu'}(x) \otimes GQ_{\nu/\mu}(x)$$

pipedream

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

Pipe dream formula for C_n , $Schubert^C_n_w = \sum_{D \in \mathcal{E}(L_n, w)} Wt(D)$

$$L_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & x_1 \oplus b_2 & & \\ \hline & & x_1 \oplus b_1 & x_2 \oplus b_1 & \\ \hline & x_1 \oplus x_1 & x_1 \oplus x_2 & x_1 \oplus x_3 & \\ \hline & & x_2 \oplus x_2 & x_2 \oplus x_3 & x_2 \oplus a_1 \\ \hline & & & x_3 \oplus x_3 & x_3 \oplus a_1 & x_3 \oplus a_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & & & & \\ \hline 1 & 2 & & & \\ \hline 0 & 1 & 2 & & \\ \hline & 0 & 1 & 2 & \\ \hline & & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$Schubert^C_{s_1} = x_1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_3 \oplus a_1 \oplus b_1$$

pipedream

- 励起ヤング図形とは
- 励起ヤング図形とは (K -theory 版)
- ウェイトの同値変形
- Id-Coxeter 代数と Yang-Baxter 関係式
- 基本変形パターンと Yang-Baxter 関係式
- 基本変形から同値変形へ
- skew shape
- coproduct
- pipedream

Pipe dream formula for C_n , $Schubert_w^{C_n} = \sum_{D \in \mathcal{E}(L_n, w)} Wt(D)$

$$L_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & x_1 \oplus b_2 & & \\ \hline & & x_1 \oplus b_1 & x_2 \oplus b_1 & \\ \hline & x_1 \oplus x_1 & x_1 \oplus x_2 & x_1 \oplus x_3 & \\ \hline & & x_2 \oplus x_2 & x_2 \oplus x_3 & x_2 \oplus a_1 \\ \hline & & & x_3 \oplus x_3 & x_3 \oplus a_1 & x_3 \oplus a_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & & & & \\ \hline 1 & 2 & & & \\ \hline 0 & 1 & 2 & & \\ \hline & 0 & 1 & 2 & \\ \hline & & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$Schubert_{s_1}^{C_3} = x_1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_3 \oplus a_1 \oplus b_1$$

Formula for $w \in S_n \subset W(C_n)$, $Schubert_w^{C_n}(x; z, t)$
 $= Schubert_{1_n \times w}^{A_{2n}}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_{n-1})$