

Excited Young diagram と Yang-Baxter 関係式

成瀬 弘 (岡山大・教育)*

概 要

ここでは、Excited Young diagram を用いた Schur 関数の記述を Nil-Coxeter 代数を用いて記述し直す。これにより種々の性質が見通しよく理解できることがわかる。

励起ヤング図形 (Excited Young diagram) は、当初、古典型グラスマン多様体の同変コホモロジーのトーラス固定点での局所化を記述するために導入された。(cf.[2]) 一方で、Schur 関数をパラメータで変形した factorial Schur 関数を用いることでもこの局所化を記述することもできる。この2つの表示の関係を説明するために、筆者は Excited Young diagram に対する重みの同値変形という手法を当初考案した。また (同変) K -理論の場合も同様にして2通りの表示の関係を説明できることがわかっている。この現象をよく見ると、本質的には Nil-Coxeter 代数が関与していることがわかり、重みの同値変形という手法はこの Yang-Baxter 関係式で [1] と同様に説明することができる。ここでは、重みの同値変形と Nil-Coxeter 代数の関係を説明するため、限定された状況で説明するが、より一般化した形で定式化できる。(以下で、 $\beta = 0$ のときが、Nil-Coxeter 代数になる。)

Coxeter 群 (W, S) に付随した (Hecke 環の一種の退化の) Id-Coxeter 代数を

生成元 u_i ($s_i \in S$) と関係式 $u_i^2 = \beta u_i, \overbrace{u_i u_j \cdots}^{m_{i,j}} = \overbrace{u_j u_i \cdots}^{m_{i,j}}, i \neq j$ (組み紐関係式) で定まる $\mathbb{Z}[\beta]$ 代数とする。 $(m_{i,j}$ は $s_i s_j$ の位数) $x \oplus y := x + y + \beta xy$ と定める。このとき、 $h_i(x) = 1 + xu_i$ とおくと、 $h_i(x)h_i(y) = h_i(x \oplus y)$ である。

ここでは、C 型の Weyl 群の場合を考え、 $I = \{s_0, s_1, \dots\}$ とする。

$$(s_0 s_1)^4 = 1, (s_i s_{i+1})^3 = 1, (i \geq 1), (s_p s_q)^2 = 1, (0 \leq p < q - 1)$$

このとき、次の Yang-Baxter 関係式が成立する。[3]

1. $h_i(y)h_{i+1}(x \oplus y)h_i(x) = h_{i+1}(x)h_i(x \oplus y)h_{i+1}(y), (1 \leq i)$
2. $h_1(y)h_0(x \oplus y \oplus y)h_1(x \oplus y)h_0(x) = h_0(x)h_1(x \oplus y)h_0(x \oplus y \oplus y)h_1(y)$
3. $h_1(y)h_0(x \oplus y)h_1(x \oplus y \oplus y)h_0(x) = h_0(x)h_1(x \oplus y \oplus y)h_0(x \oplus y)h_1(y)$
4. $h_p(x)h_q(y) = h_q(y)h_p(x), (0 \leq p < q - 1)$

それぞれには、次の重みの基本変形が対応している。

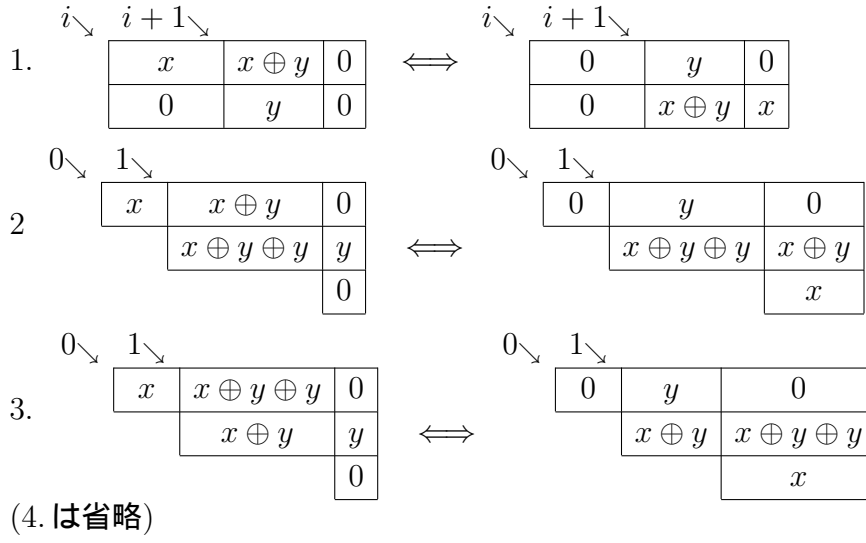
2010 Mathematics Subject Classification: 20F55, 05E15, 14N15

キーワード: Schubert calculus, Excited Young diagram, Schur function, Yang-Baxter equation

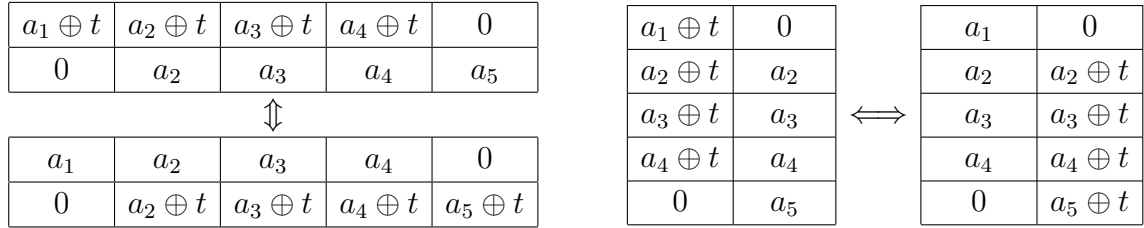
* 〒700-8530 岡山市北区津島中3 - 1 - 1 岡山大学大学院教育学研究科

e-mail: rdcv1654@cc.okayama-u.ac.jp

web: <http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suugaku/naru/>



命題 1 (重みの同値変形)



定義 $GQ_{\lambda}^{EYD}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{D \in \mathcal{E}_n(\lambda)} Wt_{\beta}(D)$ ($\mathcal{E}_n(\lambda)$ と $Wt_{\beta}(D)$ は講演で説明)

命題 2 (対称関数)

$GQ_{\lambda}^{EYD}(x_1, \dots, x_n)$ は、 $x_1, \dots, x_n$ の対称関数である。B,D 型の $GP_{\lambda}^{EYD}(x_1, \dots, x_n)$ についても同様。

- skew diagram λ/μ の場合。
- 同変パラメータ付きの場合、divided difference 作用素がどのようになるか。
- 古典型 double Schubert (Grothendieck) 多項式の pipe dream 型公式。
- coproduct rule。

なども得ることができる。(cf.[4])

参考文献

- [1] S.Fomin and A.Kirillov, The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials, Discrete Math. 153 (1996), 123–143.
- [2] T.Ikeda and H.Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, Trans. Amer. Math. Soc. vol.361(2009),5193–5221.
- [3] A.Kirillov and H.Naruse, Construction of double Grothendieck polynomials of classical types using Id-Coxeter algebras, in preparation.
- [4] H.Naruse, Excited Young diagram and Yang-Baxter equation, in preparation.