Dual Grothendieck polynomials and finite sum Cauchy formula

成瀬　弘　　　(岡山大学)*1
Alain Lascoux　(Université de Marne-la-Vallée)*2

記号の準備

$\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y}_n = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ とおく。$r^n = (r, \ldots, r)$ は、r を n 個ならべてできる分割とする。また、分割の順序は、Young 図形としての包含で定める。対称関数に関する記号法については、[5] に従うものとする。

グラスマン多様体の cohomology 環におけるシューベルト類を表す多項式として、Schur 関数 $S_\lambda(x)$ がよく知られている。また、K-theory でのシューベルトクラスを表す多項式としては、Lascoux-Schutzenberger が導入した Grothendieck 多項式 $G_\lambda(x)$ が知られている。(cf.[1]) Buch は、集合値 Young 半標準盤を用いて $G_\lambda(x)$ を定義している。行列式を用いた公式なども知られている。(cf.[3])

一方、dual Grothendieck 多項式 $g_\lambda(x)$ は、本質的には Lenart[7] に導入されているが、具体的な多項式としては、Lam-Pylyavskyy [4] で、定義されている。ここでは、この dual Grothendieck 多項式が、Schubert 多項式の特殊値として得られることに着目して、Jacobi-Trudi 型などの種々の行列式公式が自然に作れることを見る。また、この解釈から Cauchy 等式を導くことができることが示される。詳細は、[6] を参照のこと。

命題 1 (Giambelli 型公式) $\lambda = (a_1, a_2, ..., a_r | b_1, b_2, ..., b_r)$ を 分割 λ の Frobenius 表記とすると次が成り立つ。

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n) \quad = \quad \det\left(g^{(i,j)}_{(a_i|b_j)}(\mathbf{x}_n)\right)_{r\times r}$$

ここで、

$$\begin{aligned} g^{(i,j)}_{(a|b)}(\mathbf{x}_n) \quad := \quad & \sum_{p=0}^{a}\sum_{q=0}^{b}\binom{p+i-2}{p}\binom{q+j-2}{q} g_{(a-p|b-q)}(\mathbf{x}_n) \\ & + \sum_{t=2}^{\min(i,j)}\binom{a+i-t}{a}\binom{b+j-t}{b}. \end{aligned}$$

証明の方針： Flagged Schur 関数を Excited Young 図形 (cf.[2]) で表示し、その行列式公式を適用する。

本研究は科研費 (課題番号:25400041) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 41M15, 19L47
キーワード : Schubert calculus,factorial Schur function
*1 〒700-8530 岡山市北区津島中３－１－１　岡山大学 大学院教育学研究科
e-mail: `rdcv1654@okayama-u.ac.jp`
web: `http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suugaku/naru/`
*2 e-mail: `Alain.Lascoux@univ-mlv.fr`
web: `http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al/`

命題 2 λを分割とする。このとき、次が成立する。

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n + y) = \sum_{\mu \subseteq \lambda} y^{c(\lambda/\mu)}\, g_\mu(\mathbf{x}_n)$$

ここで、$c(\lambda/\mu)$ は、skwe Young図形 λ/μ における空でない列の個数とする。

証明の方針： Young半標準盤についての全単射を作ることで証明できる。

系 3 平面分割Tに対して、$x^T = \prod_i x_i^{T(i)}$ と定める。ただし、$T(i)$ は iを成分に含むTの列の個数である。このとき、次が成立する。

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n) = \sum_T x^T.$$

ここで、Tは1からnまでの自然数を成分にもつ平面分割の全体をうごく。

定理 4 （有限Cauchy等式）n, r を、自然数とする。このとき、次が成立する。

$$\sum_{\lambda \le r^n} G_\lambda(\mathbf{x}_n)\, g_\lambda(\mathbf{y}_n) = \sum_{\lambda \le r^n} s_\lambda(\mathbf{x}_n)\, s_\lambda(\mathbf{y}_n)\,.$$

注意：yの変数の個数は任意でよい。

証明の方針： より一般的な等式を、帰納法により示すことができる。

nを無限大にすることで、次のCauchy等式が得られる。

系 5

$$\sum_\lambda G_\lambda(\mathbf{x}_\infty)\, g_\lambda(\mathbf{y}_\infty) = \sum_\lambda s_\lambda(\mathbf{x}_\infty)\, s_\lambda(\mathbf{y}_\infty) = \prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1}\,.$$

参考文献

[1] A.S.Buch, A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians, Acta. Math. 189 (2002) 37–8.

[2] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus,

[3] T.Ikeda and H.Naruse, K-theory analogue of factorial Schur P-,Q- functions, Advances in Mathematics 243 (2013), 22–66.

[4] T. Lam and P. Pylyavskyy, Combinatorial Hopf algebras and K-homology of Grassmannians, International Mathematics Research Notices 2007 rmn 125, (2007).

[5] A. Lascoux, *Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials*, CBMS/AMS Lecture Notes **99** (2003).

[6] A. Lascoux and H. Naruse, Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials, preprint.

[7] C. Lenart, Combinatorial aspects of the K-theory of grassmannians, Ann Combin, 4:82, (2000).