

Factorial Schur functions and vexillary permutations of type B, C, D

成瀬 弘 (岡山大学)*

トーラス同変 cohomology 環における Schubert 類を表す二重 Schubert 多項式については、[2] において B, C, D 型の旗多様体に対して定義した。そこでは、差分商作用素が大きな役割を果たした。Weyl 群の最長元に対して、多項式が定まれば、それから差分商作用素を施すことで、すべての Schubert 多項式は構成できる。最長元に対応する多項式は、Facotrial Schur 関数を 1 個だけ使って表すことができた。この性質に注目して、Facotrial Schur 関数を 1 個だけで表せる Schubert 類がどれくらい存在するかという問題を考えた。

Facotrial Schur 関数が差分商作用素に対してどのように振る舞うかを考慮することで、このような Schubert 類を次々と見つけてゆくことができる。結果として得られる類に対応する Weyl 群の元は、Anderson-Fulton[1] が、vexillary permutation と呼んでいるものに丁度対応していることが判明した。この講演では、この事実について説明をする。

Factorial Schur 関数 Factorial Schur 関数は、[4] において導入された。次の通り、Hall-Littlewood 関数の形を同変パラメータで変形したものである。

$(x|t)^k = (x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_k)$ とおく。 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ が strict partition のとき、すなわち自然数列で $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0$ を満たすものに対して、

$$P_{\lambda}^{(n)}(x|t) = \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in S_n} w \left((x_1|t)^{\lambda_1} \cdots (x_r|t)^{\lambda_r} \prod_{1 \leq i \leq r, i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right)$$

と定める。対称群 S_n は、変数 $x_1, \dots, x_n$ の置換として作用する。また、

$$Q_{\lambda}^{(n)}(x|t) = 2^r P_{\lambda}^{(n)}(x|0, t)$$

と定める。

これらの多項式は、 $x_1, \dots, x_n$ に関しては対称であるが、パラメータ $t_1, t_2, \dots$ に関しては一般に対称ではなく、ならべる順序に依存する。どの t_i と t_j が可換になるかは、分割 λ から容易にわかる。(これは、これらの多項式が Schubert 類を代表していることの帰結でもある。)

$W(C_n)$ で、 C_n 型の Weyl 群を表す。この元は、次のように $1, 2, \dots, n$ の符号付置換で表示できる。Coxeter 群としての生成元を次のように定める。 $s_0 = [\bar{1}, 2, \dots, n]$ は、1 と -1 を互換し、他の文字は固定する。 $s_i = [1, \dots, i+1, i, \dots, n]$ ($1 \leq i < n$) は、 i と $i+1$ を入れ替え、 $-i$ と $-(i+1)$ を入れ替える。残りの文字は固定する。

本研究は科研費 (課題番号:25400041) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 41M15, 19L47

キーワード: Schubert calculus, factorial Schur function

* 〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1 岡山大学 大学院教育学研究科

e-mail: rdcv1654@okayama-u.ac.jp

web: <http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suugaku/naru/>

Anderson-Fulton([1]) に従って、符号付き置換が Vexillary であるということを次のように定める。

定義 1 type C の三つ組 $\tau = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ とは、3 個の自然数の列

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s) \text{ ただし、} \forall i \text{ について } k_i < k_{i+1}$$

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_s) \text{ ただし、} \forall i \text{ について } p_i \geq p_{i+1}$$

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s) \text{ ただし、} \forall i \text{ について } q_i \geq q_{i+1}$$

であって、すべての i について次の条件式を満たすものである。

$$(p_i - p_{i+1}) + (q_i - q_{i+1}) > k_{i+1} - k_i$$

このような、 C の三つ組 $\tau = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ に対して、 $W(C_n)$ の元 $w = w(\tau)$ を次の性質を満たすように、一意に定めることができる。

$1 \leq i \leq s$ を満たす各自然数 i に対して $a \geq p_i$ で $w(a) = \bar{b}$, $b \geq q_i$ を満たす a の個数が k_i に等しくなるような最小の長さの $w \in W(C_n)$

さらに、この C の三つ組 $\tau = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ に対して、strict partition $\lambda = \lambda(\tau)$ を、次のように定めることができる。

第 k 成分 λ_k を、ある i について $k = k_i$ となっているときは、 $\lambda_k = p_i + q_i - 1$ とし、それ以外なら、 $k_{i+1} < k < k_i$ となる i を用いて $\lambda_k = \lambda_{k_i} + k_i - k$ と定める。

定理 2 (1) 任意の strict partition λ が与えられたとき、これに対応する factorial Schur 関数 $Q_\lambda(x|t)$ のパラメータに、 $-z_1, -z_2, \dots$ および $t_1, t_2, \dots$ を重複なくそれぞれの変数について添え字が小さい順に代入した多項式は、Schubert 多項式である。

(2) このようにして作られる Schubert 多項式に対応する Weyl 群の元は、Fulton-Anderson の意味での vexillary permutation である。

証明の方針は、差分商の列をうまく構成することで最長元からこの形の多項式が作れることを示す。

補足： K -理論の場合についても同様のことが成立している。この詳細については、[3] において、論じる予定である。

参考文献

- [1] D. Anderson and W. Fulton, Degeneracy loci, Pfaffians, and vexillary signed permutations in types B,C, and D. ArXiv:1210.2066
- [2] T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, Adv. Math. 226 (2011) 840-886.
- [3] T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, work in progress.
- [4] V. N. Ivanov, Interpolation analogues of Schur Q -functions. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 307 (2004), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 10, 99–119, 281–282; translation in J. Math. Sci. (N. Y.) 131 (2005), no. 2, 5495–5507.
- [5] H. Naruse, in preparation.