

シューベルト・カルキュラスの視点からの
Hall-Littlewood 函数の一般化・母函数表示と応用

成瀬 弘
山梨大学・総合研究部

日本数学会 2018 年度年会 於 東京大学
無限可積分系特別セッション特別講演
2018.03.21 (水)

目次

(1) Introduction

(2) 形式群、一般化コホモロジーと push forward

(3) 主結果 (一般化・母函数表示 文献 [12], [13])

(4) 応用

(5) 課題

(1)Introduction

シューベルト・カルキュラス 最近（約10年間）の動向

国際研究集会

2007年3月 Banff, Canada

2012年7月 Osaka, Japan MSJ-SI 2012

2017年11月 Guangzhou, China

ワークショップ

Workshop on Equivariant generalized Schubert calculus and its applications April 28 - May 1, 2016, University of Ottawa

日本で出版された（される）書籍

前野俊昭：Schubert 多項式とその仲間たち, 2016/3/7

ASPM71 Schubert Calculus – Osaka 2012 , 2016/12/15

池田 岳：数え上げ幾何学講義 — シューベルト・カルキュラス入門 —
,2018/06/

古典型 Lie 群のシューベルト・カルキュラスに登場する様々の対称函数

シューア函数 $s_\lambda(\mathbf{x}_n)$ ただし、 $\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とする。

シューア P -函数 $P_\lambda(\mathbf{x}_n)$

シューア Q -函数 $Q_\lambda(\mathbf{x}_n) = 2^{\ell(\lambda)} P_\lambda(\mathbf{x}_n)$

$$\text{Factorial シューア函数 } s_\lambda(\mathbf{x}_n|t) = \sum_{w \in S_n} w \left(\frac{\prod_{i=1}^n (x_i|t)^{\lambda_i + n - i}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} x_i - x_j} \right)$$

Factorial シューア P -函数 $\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0)$, $n \geq r$

$$P_\lambda(\mathbf{x}_n|t) = \sum_{w \in S_n/S_{n-r}} w \left((x_1|t)^{\lambda_1} \dots (x_r|t)^{\lambda_r} \prod_{1 \leq i \leq r, i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Factorial シューア Q -函数 $Q_\lambda(x|t) = 2^{\ell(\lambda)} P_\lambda(x|t)$

ただし、 $(x|t)^k = (x - t_1)(x - t_2) \dots (x - t_k)$

分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対する Factorial Hall-Littlewood 函数

$$HP_\lambda(\mathbf{x}_n; t|b) := \sum_{w \in S_n/S_{n-r}} w \left((x_1|b)^{\lambda_1} \cdots (x_r|b)^{\lambda_r} \prod_{1 \leq i \leq r, i < j \leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right)$$

ただし、 $\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x|b)^k = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_k)$

例 (記号 $[n]_t = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$ とする。)

$$HP_1(\mathbf{x}_n; t|b) = s_1(\mathbf{x}_n) - b_1[n]_t$$

$$HP_2(\mathbf{x}_n; t|b) = s_2(\mathbf{x}_n) - ts_{11}(\mathbf{x}_n) - (b_1 + b_2)s_1(\mathbf{x}_n) + b_1b_2[n]_t$$

$$\begin{aligned} HP_{22}(\mathbf{x}_4; t|b) = & (1 + t) \times \\ & \left[s_{22}(\mathbf{x}_4) - ts_{211}(\mathbf{x}_4) + t^3s_{14}(\mathbf{x}_4) - (b_1 + b_2) \left(s_{21}(\mathbf{x}_4) - (t + t^2)s_{13}(\mathbf{x}_4) \right) \right. \\ & + b_1b_2(1 + t + t^2)s_2(\mathbf{x}_4) + (b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2 - (t^2 + t^3)b_1b_2)s_{11}(\mathbf{x}_4) \\ & \left. - b_1b_2(b_1 + b_2)(1 + t + t^2)s_1(\mathbf{x}_4) + b_1^2b_2^2(1 + t + t^2)(1 + t^2) \right] \end{aligned}$$

New universal factorial Schur

分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ を $\lambda = (n_1^{m_1} n_2^{m_2} \dots n_d^{m_d})$ と表す。ただし、 $n_1 > n_2 > \dots > n_d \geq 0$ とする。

$$(\mathbf{x}|\mathbf{b})^{[\lambda]} := \prod_{r=1}^d \left(\prod_{\nu(r-1) < i \leq \nu(r)} [x_i|\mathbf{b}]^{n_r + n - \nu(r)} \right).$$

ここで、 $\nu(r) = \sum_{i=1}^r m_i$ ($r = 1, 2, \dots, d$), $\nu(0) = 0$ とする。

例えば、 $\lambda = (4, 4, 3, 3, 3, 0, 0)$, $n = 7$ の時、

$$(\mathbf{x}|\mathbf{b})^{[\lambda]} = [x_1|b]^9 [x_2|b]^9 [x_3|b]^5 [x_4|b]^5 [x_5|b]^5 [x_6|b]^0 [x_7|b]^0$$

$$S_{\lambda}^{\mathbb{L}}(x_1, \dots, x_n|\mathbf{b}) := \sum_{\bar{w} \in S_n / S_n^{\lambda}} w \cdot \left[\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{b})^{[\lambda]}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n, n(i) < n(j)} (x_i +_{\mathbb{L}} \bar{x}_j)} \right]$$

また、

$$S_{\lambda}^{\mathbb{L}}(x_1, \dots, x_n) := S_{\lambda}^{\mathbb{L}}(x_1, \dots, x_n|\mathbf{0}) \text{ とおく。}$$

シューベルト・カルキュラスの一般化・変種の視点

- [1] 一般コホモロジー (K-理論、楕円コホモロジー、複素コボルディズム)
- [2] (トーラス) 同変
- [3] ホモロジー
- [4] 量子コホモロジー
- [5] 実シューベルト多様体
- etc.

母函数表示を用いることの利点

- Determinantal, Pfaffian formula が、統一的に示される。
- Pieri rule の情報が組み込まれている。
- 漸化式などの相互関係が明らかになる。

シューア函数

$s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$: 変数 $x_1, \dots, x_n$ の対称函数、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$: 分割

より一般的に、整数列 $(m_1, \dots, m_r)$ に対しても、

$$s_{(m_1, \dots, m_r)}(x_1, \dots, x_n)$$

を定めることができる。

例えば、 $s_{(2,4)} = -s_{(3,3)}$ となっている。

母函数

$$\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} s_{(m_1)}(x_1, \dots, x_n) u_1^{m_1} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - u_1 x_i} =: A(u_1)$$

$$\sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} s_{(m_1, m_2)}(x_1, \dots, x_n) u_1^{m_1} u_2^{m_2} = A(u_1) A(u_2) (1 - u_2/u_1)$$

$$\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} s_{(m_1)}(x_1, \dots, x_n) u_1^{m_1} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - u_1 x_i} =: A(u_1)$$

$$\sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} s_{(m_1, m_2)}(x_1, \dots, x_n) u_1^{m_1} u_2^{m_2} = A(u_1) A(u_2) (1 - u_2/u_1)$$

Jacobi-Trudi の公式

$$s_{(m_1, m_2)} = \det \begin{pmatrix} s_{(m_1)}, s_{(m_1+1)} \\ s_{(m_2-1)}, s_{(m_2)} \end{pmatrix}$$

$s_{(m_1, m_2)} = -s_{(m_2-1, m_1+1)}$ となっている。

一般に、

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} s_{(m)}(x_1, \dots, x_n) u^m = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - u x_i} =: A(u)$$

として

$$\begin{aligned} \sum_{(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r} s_{(m_1, \dots, m_r)}(x_1, \dots, x_n) u_1^{m_1} \cdots u_r^{m_r} \\ = A(u_1) \cdots A(u_r) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 - u_j / u_i) \end{aligned}$$

で、 $s_{(m_1, \dots, m_r)}(x_1, \dots, x_n)$ を定めると、Jacobi-Trudi の公式を満たしている。

また、例えば $s_{(0, -1, 3)} = s_{(1, 1, 0)} = e_2$ である。

Factorial-Schur 函数 $s_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}(x_1, \dots, x_n | t)$ の場合

$k \geq 0$ のとき、

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} s_{(m)}^{\{k\}}(x_1, \dots, x_n | t_1, \dots, t_k) u^m = \frac{\prod_{j=1}^k (1 - ut_j)}{\prod_{i=1}^n (1 - ux_i)} =: A^{\{k\}}(u)$$

として、分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r)$ に対して、

$$A^{\{\lambda_1 + r - 1\}}(u_1) A^{\{\lambda_2 + r - 2\}}(u_1) \dots A^{\{\lambda_r\}}(u_r) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 - u_j / u_i)$$

の $u_1^{\lambda_1} \dots u_r^{\lambda_r}$ の係数が、 $s_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}(x_1, \dots, x_n | t)$ となる。

(これは、非交差格子路の組合せ論でも示せる。)

multi-Pfaffian

$k = 1, 2, 3, \dots$ に対して、

$$A^{\{k\}}(u) := \sum_{m \geq 0} c_m^{\{k\}} u^m$$

としたとき、

$\text{Pf} \left[c_{r_1}^{\{1\}} c_{r_2}^{\{2\}} \cdots c_{r_m}^{\{m\}} \right]$ を

$$A^{\{1\}}(u_1) A^{\{2\}}(u_2) \cdots A^{\{m\}}(u_m) \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1 - u_j/u_i}{1 + u_j/u_i}$$

の $u_1^{r_1} u_2^{r_2} \cdots u_m^{r_m}$ の係数と定め、multi-Pfaffian という。

K -理論での Schur 函数にあたる Grothendieck 多項式 $G_\lambda(x_1, \dots, x_n)$

定理 (A.Buch 2002, HIMN 2017 アブストラクト文献 [2])

分割 λ が一行ときの母函数は、次で与えられる。

$$A(z) = \frac{1}{1 + \beta z} \prod_{i=1}^n \frac{z(1 + \beta x_i)}{z - x_i}$$

つまり、この z^{-k} の係数が $G_k(x_1, \dots, x_n)$ となる。 ($k \geq 0$) のとき)

z^k の係数は、 $(-\beta)^k$ で、これは $G_{-k}(x_1, \dots, x_n)$ と表される。

$\frac{1}{1 + \beta z}$ は、何を表しているのか？

(2) 形式群、一般化コホモロジーと push forward

形式群 (より正確には、1次元の可換な形式群) とは、次の性質をみたす

2変数の形式冪級数 $F(x, y) \in R[[x, y]]$ のことをいう。 (R は、可換環)

(1) $F(x, y)$ は、次の形をしている。

$$F(x, y) = x + y + \sum_{i, j \geq 1} a_{i, j} x^i y^j, \quad (a_{i, j} \in R)$$

(2) 変数 x, y について可換である。

$$F(x, y) = F(y, x)$$

(3) 結合法則をみたす。

$$F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$$

$F(x, y)$ を $x +_F y$ と表すこともある。

形式群の例

$$F_m(x, y) = x + y + \beta xy$$

$$F_{hp}(x, y) = \frac{x + y + \beta xy}{1 - \gamma xy}$$

$$F_s(x, y) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$$

など

$\log_F(x)$ と $\exp_F(x)$

形式群 $F(x, y) \in R[[x, y]]$ に対して、

$$F(x, y) = \exp_F(\log_F(x) + \log_F(y))$$

をみたす $\log_F(x)$ と $\exp_F(x)$ を考える。一般には、このようなものは存在するとは限らないが、 R がトーションを持たない可換環の場合は、 $R \otimes \mathbb{Q}$ を係数にもつ $\log_F(x), \exp_F(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$ が、以下のように作れる。(Myshenko)

$$\log_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{C}P^n]_F \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ここで、 $\mathbb{C}P^n$ は、複素 n 次元射影空間で $[\mathbb{C}P^n]_F$ は、 F に対応して定まるコホモロジー理論での $\mathbb{C}P^n$ のコホモロジー類を表す。例えば、

$F_m(x, y) = x + y + \beta xy$ のとき、 $[\mathbb{C}P^n]_{F_m} = (-\beta)^n$ であり、

$$\log_{F_m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \log(1 + \beta x)/\beta,$$

$$\exp_{F_m}(x) = (e^{\beta x} - 1)/\beta$$

$$F(x, y) = \exp_F(\log_F(x) + \log_F(y))$$

$\log_F(x)$ と $\exp_F(x)$ を用いて $[t]_F$ 倍を次で定める。

$$[t]_F x := \exp_F(t \log_F(x)).$$

$t = n$ 自然数のとき、

$$[n]_F x = \overbrace{x +_F x +_F \cdots +_F x}^n$$

である。 $[-1]_F x = \bar{x}$ は、逆元であり、 $F(x, \bar{x}) = 0$ を満たす。

例えば、 $F_s(x, y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ のとき
 $\exp_{F_s}(x) = \sin(x)$, $\log_{F_s}(x) = \sin^{-1}(x)$ で

$$[n]_{F_s} \sin(x) = \sin(nx) \text{ となる。}$$

一般の楕円曲線は、5個のパラメータ $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6$ を用いて、

$$y^2 + \mu_1 xy + \mu_3 y = x^3 + \mu_2 x^2 + \mu_4 x + \mu_6$$

と表され、これに対応する形式群は、Buchstaber-Bunkova [1](2011) により決定されている。特に、 μ_1, μ_2 のみ残して、 $\mu_3 = \mu_4 = \mu_6 = 0$ とした場合は、

$$F_{E\mu_1, \mu_2}(x, y) = \frac{x + y - \mu_1 xy}{1 + \mu_2 xy}$$

となる。(Hyperbolic type と呼ばれる。)

また、 μ_2, μ_4 のみ残して、 $\mu_1 = \mu_3 = \mu_6 = 0$ とした場合は、 $\delta = \mu_2$, $\varepsilon = \mu_2^2 - 4\mu_4$ とおき、 $S_{\delta, \varepsilon}(x) := 1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4$ として、

$$F_{Ell_{\delta, \varepsilon}}(x, y) = \frac{x\sqrt{S_{\delta, \varepsilon}(y)} + y\sqrt{S_{\delta, \varepsilon}(x)}}{1 - \varepsilon x^2 y^2}$$

となる。このとき、 $\exp_F(x) = \operatorname{sn}(x; \delta, \varepsilon)$ は elliptic sine で $(\exp_F(x)')^2 = S_{\delta, \varepsilon}(\exp_F(x))$ 。

さらに、 $\delta = 1/2, \varepsilon = 0$ とすると、 $\exp_F(x) = \sin(x)$ である。

形式群 $F(x, y)$ の不変微分

第 1 変数での偏微分を $F_1(x, y) := \partial_x F(x, y)$ と表し、 $\psi_F(z)$ を次で定める。

$$\psi_F(z) = \frac{1}{F_1(0, z)}$$

この時、 $\psi_F(x)dx$ は、 $F(x, y)$ の不変微分 (invariant differential form) と呼ばれる。

また、 $P_F(x, y) \in A[[x, y]]$ を

$$P_F(x, y) := \frac{x - y}{F(x, \bar{y})}$$

で、定める。このとき $F(x, y)$ が、結合法則を満たすことを用いて次が示せる。

$P_F(x, y)$ は、可逆であり $\frac{1}{P_F(x, x)} = \psi_F(x)$ となっている。

注意： $F(x, y) = x + y + \beta xy$ のとき、 $\psi_F(x) = \frac{1}{1+\beta x}$ である。

Push forward formula for projective bundle

D.Quillen: On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory (Bull. Amer. Math. Soc. Volume 75, Number 6 (1969), 1293-1298.) からの引用

Theorem 1. *Let E be a complex vector bundle of dimension n , $f : PE' \rightarrow X$ be the associated projective bundle of lines in the dual E' of E , and let $\mathcal{O}(1)$ be the canonical quotient line bundle on PE' . Then the Gysin homomorphism $f_* : \Omega^q(PE') \rightarrow \Omega^{q-2n+2}(X)$ is given by the formula*

$$f_*(u(\xi)) = \operatorname{res}_n \frac{u(Z)\omega(Z)}{\prod_{j=1} F^\Omega(Z, I\lambda_j)}.$$

Here $u(Z) \in \Omega(X)[Z]$, $\xi = c_1^\Omega(\mathcal{O}(1))$, ω and I are the invariant differential form and inverse respectively for the group law F^Ω , and the λ_i are the dummy variables of which $c_q^\Omega(E)$ is the q th-elementary symmetric function.

$F(x, y) = x + y + \beta xy$ のとき、 $\omega(Z) = \frac{1}{1+\beta Z} dZ$, $I\lambda_i = -\lambda_i/(1+\beta\lambda_i)$,

$F(Z, I\lambda_i) = Z \ominus \lambda_i = \frac{Z-\lambda_i}{1+\beta\lambda_i}$ なので、

$$\begin{aligned} f_*(\xi^k) &= \operatorname{res} \frac{z^k \frac{1}{1+\beta Z} dZ}{\prod_{j=1}^n (Z \ominus \lambda_j)} = [Z^{-1}] \left(\frac{1}{1+\beta Z} Z^k \prod_{j=1}^n \frac{1+\beta\lambda_j}{Z-\lambda_j} \right) \\ &= [Z^{-(k-(n-1))}] \left(\frac{1}{1+\beta Z} \prod_{j=1}^n \frac{Z(1+\beta\lambda_j)}{Z-\lambda_j} \right) \end{aligned}$$

Push-forward (Gysin map) とは、何か？

Complex cobordism theory $MU^(-)$*

According to Quillen (1971) Elementary Proof...[Proposition 1.2], for a manifold X , $MU^q(X)$ can be identified with the set of *cobordism classes of proper, complex-oriented* maps of dimension $-q$. Thus a map of manifolds $f : Z \longrightarrow X$, which is complex-oriented in the sense of Quillen, determines a class denoted by $[Z \xrightarrow{f} X]$, or simply $[Z]$

For a proper complex-oriented map $g : X \longrightarrow Y$ of dimension d , the Gysin map

$$g_* : MU^q(X) \longrightarrow MU^{q-d}(Y)$$

is defined by sending the cobordism class $[Z \xrightarrow{f} X]$ into the class $[Z \xrightarrow{g \circ f} Y]$.

ポアンカレ duality を用いた push forward の説明

$$\mathcal{P}_X : H^i(X) \longrightarrow H_{m-i}(X), \alpha \longmapsto \alpha \cap [X]$$

$[X] \in H_*(X)$ は fundamental class

$f : X \longrightarrow Y$ $\dim X = m, \dim Y = n$ としたとき、

$$f_* : H^i(X) \xrightarrow{\sim \mathcal{P}_X} H_{m-i}(X) \xrightarrow{f_*} H_{m-i}(Y) \xleftarrow{\sim \mathcal{P}_Y} H^{i-(m-n)}(Y).$$

push forward は、対称化作用素である。(例 : divided difference)

$G \supset P_i \supset B$ 単純ルート α_i に対応する極小パラボリック部分群 P_i に対して、

$\pi_i : G/B \rightarrow G/P_i$ を標準射影としたとき、

$$\partial_i = \pi_i^* \pi_{i*} : H^*(G/B) \rightarrow H^*(G/P_i) \rightarrow H^*(G/B)$$

極大トーラス $T \subset G$, $\rho : BT \rightarrow BG$ に対して、 $\rho_* : h^*(BT) \rightarrow h^*(BG)$

定理 (Bressler-Evens 1990) $f \in h^*(BT)$ に対して、

$$\rho_*(f) = \sum_{w \in W_G} w \left[\frac{f}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \chi(L_{-\alpha})} \right]$$

Push forward for the Grassmann bundle $\pi_F : G^{f-r}(F) \longrightarrow X$

The Gysin map $\pi_{F*} : H^*(G^{f-r}(F)) \longrightarrow H^*(X)$ is described by the following symmetrizing operator

$$\pi_{F*}(g(x_1, \dots, x_f)) = \sum_{\bar{w} \in S_f / S_{f-r} \times S_r} w \cdot \left[\frac{g(x_1, \dots, x_f)}{\prod_{1 \leq i \leq f-r} \prod_{f-r+1 \leq j \leq f} (x_i - x_j)} \right]$$

for a polynomial $g(X_1, \dots, X_f) \in H^*(X)[X_1, \dots, X_f]^{S_{f-r} \times S_r}$.

Kempf-Laksov 型と Daemon 型の push forward

full flag bundle (projective bundle の積み重ね) と Grassmannian bundle

なぜ、次の等式が成立するのか？

$$\sum_{w \in S_n} w \left(\frac{\prod_{i=1}^n (x_i|t)^{\lambda_i + n - i}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} x_i - x_j} \right) = \sum_{w \in S_n / S_{n-r}} w \left(\frac{\prod_{i=1}^r (x|t)^{\lambda_i + n - i}}{\prod_{1 \leq i \leq r, i < j \leq n} x_i - x_j} \right)$$

For two positive integers a, b with $a \leq b$, denote by $[a, b]$ the set of integers i such that $a \leq i \leq b$. For the case of $a = b$ we abbreviate $[a, a] = [a]$.

Let $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{P}_n$ be a partition of length $\ell(\lambda) \leq n$. Consider the maximal “intervals” $I_1, I_2, \dots, I_d$ in $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$, where the sequence λ is “constant”. Thus we have a decomposition

$$[1, n] = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \dots \sqcup I_d \quad (\text{disjoint union}).$$

ex) $\lambda = (3, 3, 2, 2, 2, 2) \in \mathcal{P}_7$, $I_1 = [1, 2]$, $I_2 = [3, 6]$, $I_3 = [7]$.

Let $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ be two partitions of length $\leq n$. We say μ is a “refinement” of λ if the corresponding decompositions of the interval $[1, n]$ is a refinement.

ex) $\mu = (7, 5, 3, 3, 2, 2, 1) \in \mathcal{P}_7$ corresponds to the decomposition $[1] \sqcup [2] \sqcup [3, 4] \sqcup [5, 6] \sqcup [7]$ and $\mu = (7, 5, 3, 3, 2, 2, 1)$ is a refinement of $\lambda = (4, 4, 2, 2, 2, 2)$.

By the construction of the associated partial flag bundle $\mathcal{F}\ell^\lambda(E)$, if μ is a refinement of λ , we have a natural projection from $\mathcal{F}\ell^\mu(E)$ to $\mathcal{F}\ell^\lambda(E)$, denoted by

$$“\pi_\lambda^\mu : \mathcal{F}\ell^\mu(E) \longrightarrow \mathcal{F}\ell^\lambda(E)” .$$

Furthermore, for three partitions λ, μ , and $\nu \in \mathcal{P}_n$, if ν is a refinement of μ , and μ is a refinement of λ , then ν is also a refinement of λ , and the relation $\pi_\lambda^\mu \circ \pi_\mu^\nu = \pi_\lambda^\nu$ holds.

$$\begin{aligned}
P_{\lambda}^{(n)}(x|t) &= \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in S_n} w \left((x_1|t)^{\lambda_1} \cdots (x_r|t)^{\lambda_r} \prod_{1 \leq i \leq r, i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right) \\
&= \sum_{w \in S_n/S_{n-r}} w \left((x_1|t)^{\lambda_1} \cdots (x_r|t)^{\lambda_r} \prod_{1 \leq i \leq r, i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right)
\end{aligned}$$

Let $E \longrightarrow X$ be a complex vector bundle of rank n .

Darondeau-Pragacz formula in cohomology

Consider the complete flag bundle $\varpi : \mathcal{Fl}(E) \longrightarrow X$, and the induced Gysin map $\varpi_* : H^*(\mathcal{Fl}(E)) \longrightarrow H^*(X)$ in cohomology. Then one of Darondeau-Pragacz's formula is stated as follows : For a polynomial $f(t_1, \dots, t_n) \in H^*(X)[t_1, \dots, t_n]$, one has

$$\begin{aligned} & \varpi_*(f(y_1, \dots, y_n)) \\ &= [t_1^{n-1} \cdots t_n^{n-1}] \left(f(t_1, \dots, t_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i) \prod_{i=1}^n s_{1/t_i}(E^\vee) \right). \end{aligned}$$

Darondeau-Pragacz formula in complex cobordism

For $r = 1, 2, \dots, n$, the following Gysin formula for the flag bundle $\varpi_{1,2,\dots,r} : \mathcal{Fl}_{1,2,\dots,r}(E) \longrightarrow X$ holds: For a polynomial $f(t_1, \dots, t_r) \in MU^*(X)[t_1, \dots, t_r]$, one has

$$\begin{aligned} & \varpi_{1,\dots,r*}(f(y_1, \dots, y_r)) \\ &= [t_1^{n-1} \cdots t_r^{n-1}] \left(f(t_1, \dots, t_r) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (t_j +_{\mathbb{L}} \bar{t}_i) \prod_{i=1}^r \mathcal{S}_{1/t_i}^{\mathbb{L}}(E^\vee) \right). \end{aligned}$$

(3) 主結果 (一般化・母函数表示 文献[12],[13])

[定義] t を不定元とし、 $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ とする。正整数列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対して、 $HP_\lambda^F(\mathbf{x}_n; t), HQ_\lambda^F(\mathbf{x}_n; t)$ を次で定める。 ($r \leq n$ とする。)

$$HP_\lambda^F(\mathbf{x}_n; t) := \sum_{w \in S_n / (S_1^r \times S_{n-r})} w \left(\mathbf{x}_n^\lambda \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{i < j \leq n} \frac{F(x_i, [t]_F(\bar{x}_j))}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right)$$

$$HQ_\lambda^F(\mathbf{x}_n; t) := \sum_{w \in S_n / (S_1^r \times S_{n-r})} w \left(\mathbf{x}_n^{[\lambda]_F} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{i < j \leq n} \frac{F(x_i, [t]_F(\bar{x}_j))}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right)$$

ここで、正整数 $k > 0$ に対して、 $x^{[k]^F} := F(x, [t]_F(\bar{x}))x^{k-1}$ とし、

$$\mathbf{x}_n^\lambda := x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda_r}, \quad \mathbf{x}_n^{[\lambda]_F} := x_1^{[\lambda_1]^F} \cdots x_r^{[\lambda_r]^F}$$

とする。

$$A_{F,n}^{HP}(z) : = \frac{1}{P_F(z)} \prod_{i=1}^n \frac{F(z, [t]_F \bar{x}_i)}{F(z, \bar{x}_i)}$$

$$A_{F,n}^{HQ}(z) : = \frac{z}{P_F(z) F(z, [t]_F \bar{z})} \prod_{i=1}^n \frac{F(z, [t]_F \bar{x}_i)}{F(z, \bar{x}_i)}$$

とおく。

主定理 正整数列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ に対して、

(1) $\left(\prod_{i=1}^r A_{F,n}^{HP}(z_i) \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{F(z_j, \bar{z}_i)}{F(z_j, [t]_F \bar{z}_i)}$ の $z_1^{-\lambda_1} \dots z_r^{-\lambda_r}$ の係数は、 $HP_{\lambda}^F(\mathbf{x}_n; t)$ である。

(2) $\left(\prod_{i=1}^r A_{F,n}^{HQ}(z_i) \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{F(z_j, \bar{z}_i)}{F(z_j, [t]_F \bar{z}_i)}$ の $z_1^{-\lambda_1} \dots z_r^{-\lambda_r}$ の係数は、 $HQ_{\lambda}^F(\mathbf{x}_n; t)$ である。

(4) 応用

connective K 理論の場合

$$x \oplus y = F_m(x, y) = x + y + \beta xy, \quad x \ominus y = F_m(x, \bar{y}) = \frac{x - y}{1 + \beta y}$$

$$G_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x_1, \dots, x_n) = [z^{-\lambda}] \left(A(z_1) \cdots A(z_r) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{z_j \ominus z_i}{z_j} \right),$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{z_j \ominus z_i}{z_j} = \prod_{i=1}^r \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{r-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 - z_i/z_j) \text{ より、}$$

$$G_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x_1, \dots, x_n) = \det \left([z_i^{-(\lambda_i + j - i)}] \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{r-i}} A(z_i) \right)_{r \times r}$$

$$\begin{aligned}
GQ_\lambda(x) &= [z^{-\lambda}] A(z_1) \cdots A(z_r) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{z_j \ominus z_i}{z_j \oplus z_i} \\
&= [z^{-\lambda}] A(z_1) \cdots A(z_r) \prod_{i=1}^{r-1} \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{r-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{z_j - z_i}{z_j \oplus z_i} \\
&= [z^{-\lambda}] A(z_1) \cdots A(z_r) \prod_{i=1}^{r-1} \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{r-i}} \text{Pf} \left(\frac{z_j - z_i}{z_j \oplus z_i} \right) \\
&= [z^{-\lambda}] \text{Pf} \left(A(z_i) A(z_j) \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{r-i}} \frac{1}{(1 + \beta z_j)^{r-j}} \frac{z_j - z_i}{z_j \oplus z_i} \right) \\
&= \text{Pf} \left([z_i^{-\lambda_i} z_j^{-\lambda_j}] A(z_i) A(z_j) \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{r-i-1}} \frac{1}{(1 + \beta z_j)^{r-j}} \frac{z_j \ominus z_i}{z_j \oplus z_i} \right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{A(z_1, z_2) = A(z_1)A(z_2) \frac{z_2 \ominus z_1}{z_2 \oplus z_1}} \quad \text{の両辺の } z_1^{-k} z_2^{-l} \text{ の係数を比較して、}$$

$GQ_{k,l}$ を、 $GQ_a \times GQ_b$ の 1 次結合で表すことができる。

また、

$$\boxed{A(z_1)A(z_2) = A(z_1, z_2) \frac{z_2 \oplus z_1}{z_2 \ominus z_1}} \quad \text{の両辺の } z_1^{-k} z_2^{-l} \text{ の係数を比較して、}$$

$GQ_k \times GQ_l$ を、 $GQ_{a,b}$ の 1 次結合で表すことができる。

補題

$$\frac{z_2 \ominus z_1}{z_2 \oplus z_1} = \sum_{i \geq j \geq 0} g_{i,j} z_1^i z_2^{-j}, \quad g_{i,j} := (-1)^i \beta^{i-j} \left(2 \binom{i}{j} + \binom{i}{j+1} - \delta_{j,0} \right)$$

$$\frac{z_2 \oplus z_1}{z_2 \ominus z_1} = \frac{(1 + z_1/z_2 + \beta z_1)(1 + \beta z_1)}{1 - z_1/z_2}$$

(5) 課題

今後の課題として以下が考えられる。

1. BCD 型の Hall-Littlewood 函数の一般化
2. Hyperbolic type などの楕円コホモロジーの場合の具体形を記述する。
3. t を 1 のべき根に特殊化した場合の多項式の意味について (p -compact 群と関係している。現在は、かなり理解が進んでいる。)
4. Hall-Littlewood 函数を Schur 函数で展開したときの係数の具体形を求める明示公式を作る。 (Kostka 係数の逆行列 の一般化となる。)
5. ホモロジーの Schubert 基底に対応する多項式についても、母函数表示を求める問題がある。

ホモロジー基底について例えば、次の例がある。(文献[8]の結果より)

Dual stable Grothendieck polynomial $g_\lambda(y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{Z}[\beta][[y_1, y_2, \dots]]$ は、次で定義される。

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} G_{\lambda}(x) g_{\lambda}(y).$$

長さ r の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ($r \leq n$) に対して、次が成立する。

$$[u^\lambda] \left(\prod_{k=1}^r \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - y_j u_k} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{u_i \ominus u_j}{u_i} = g_{\lambda}(y_1, \dots, y_m)$$

有難うございました。

本研究は科研費(課題番号:16H03921)
「シューベルト・カルキュラスの深化」
の助成を受けたものである。

追加 参考文献

形式群の本田理論

西来路文朗 SAIRAIJI Fumio 中央大学数学教室講究録, No1, 2008-03

Abel函数論

大西良博 ONISHI Yoshihiro 中央大学数学教室講究録, No6, 2013-06

B. Totaro, Towards a Schubert calculus for complex reflection groups. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2003), 134, 83–93.