Factorial Schur functions and vexillary permutations of types B, C and D

成瀬　弘（岡山大・教育）

2013.09.25 日本数学会年会 (於愛媛大学) 一般講演

Factorial Schur P-, Q-関数

自然数kに対して、$(x|t)^k = (x-t_1)(x-t_2)\cdots(x-t_k)$とおく。

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$がstrict partition($\lambda \in SP$)のとき、すなわち自然数列で$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0$を満たすものに対して、

$$P_\lambda^{(n)}(x|t) := \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in S_n} w \left((x_1|t)^{\lambda_1} \cdots (x_r|t)^{\lambda_r} \prod_{1 \le i \le r,\, i < j \le n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$Q_\lambda^{(n)}(x|t) := 2^r P_\lambda^{(n)}(x|0,t)$ と定める。

これらの多項式は、$x_1, \ldots, x_n$に関しては対称であるが、
パラメータ$t = (t_1, t_2, \ldots)$に関しては一般に、対称とは限らない。

どのt_iとt_jが可換になるかは、分割λから容易にわかる。（これは、これらの多項式が同変Schubert類を代表していることの帰結でもある。）

パッフィアン公式

$$Q_\lambda(x|t) = \mathrm{Pf}\left(Q_{\lambda_i,\lambda_j}(x|t)\right)_{1\le i<j\le r}$$

多重パッフィアン(Multi-Pfaffian)で表すこともできる。

符号付き置換

$W(C_n)$ で、C_n 型の Weyl 群を表す。この元は、次のように $1, 2, \dots, n$ の符号付置換で表示できる。Coxeter 群としての生成元を次のように定める。

$s_0 = [\bar{1}, 2, \dots, n]$ は、1 と -1 を互換し、他の文字は固定する。

$s_i = [1, \dots, i+1, i, \dots, n]$ $(1 \leq i < n)$ は、
i と $i+1$ を入れ替え、$-i$ と $-(i+1)$ を入れ替える。残りの文字は固定する。

C 型（極大）グラスマン元の例　　$Q_\lambda(x|t)$ は、これらの元に対応する double Schubert 多項式となっている。

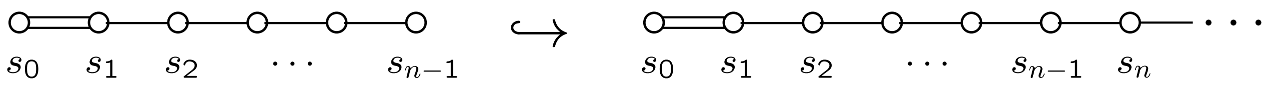
$s_0 = [\bar{1}, 2, 3, 4]$, $\lambda(s_0) = \ydiagram{1}$
$Q_1(x|t) = Q_1(x)$

$s_1 s_0 = [\bar{2}, 1, 3, 4]$, $\lambda(s_1 s_0) = \ydiagram{2}$
$Q_2(x|t) = Q_2(x) - t_1 Q_1(x)$

$s_2 s_1 s_0 = [\bar{3}, 1, 2, 4]$, $\lambda(s_2 s_1 s_0) = \ydiagram{3}$
$Q_3(x|t) = Q_3(x) - (t_1 + t_2) Q_2(x) + t_1 t_2 Q_1(x)$

$s_0 s_1 s_0 = [\bar{2}, \bar{1}, 2, 4]$, $\lambda(s_0 s_1 s_0) = \ydiagram{2,1+1}$
$Q_{21}(x|t) = Q_{21}(x)$

$\mathsf{C}_n \subset \mathsf{C}_\infty$ ルート系



単純ルート

$$\alpha_0 = 2t_1, \quad \alpha_i = t_{i+1} - t_i \quad (1 \le i \le n-1),$$

$$\omega(\alpha_0) = -2z_1, \quad \omega(\alpha_i) = z_i - z_{i+1} \quad (1 \le i \le n-1),$$

Divided difference　作用素

$$\partial_i f = \frac{f - s_i^z f}{\omega(\alpha_i)}, \quad \delta_i f = \frac{f - s_i^t f}{\alpha_i},$$

分割 $\lambda \in SP$ の i 番目の対角線の最下部がカドになっているとき i-removable であるという。($i = 0, 1, 2, ...$) このとき、i このカドを取り除いてできる分割を $s_i\lambda$ で表す。

Proposition 1 $i \geq 1$ のとき、

分割 $\lambda \in SP$ が *i-removable* でない

$\Longleftrightarrow$

$Q_\lambda(\mathbf{x}|t)$ において、i 番目のパラメータ t_i と $i+1$ 番目のパラメータ t_{i+1} は、可換である。

$\Longleftrightarrow$

$\delta_i Q_\lambda(\mathbf{x}|t) = 0$

また、分割 $\lambda \in SP$ が 0-removable でない $\Longleftrightarrow$ $\delta_0 Q_\lambda(\mathbf{x}|t) = 0$

Proposition 2 分割 $\lambda \in SP$ が *i-removable* のとき、

$$\delta_i Q_\lambda(\mathbf{x}|t) = Q_{s_i\lambda}(\mathbf{x}|t)$$

Corollary 3 分割 $\lambda \in SP$ が i-*removable* とする。

パラメータ列 a の i 番目が t_k で、$i+1$ 番目が t_{k+1} であり,
これ以外には、t_k および t_{k+1} が登場しないとき

$$\delta_k Q_\lambda(\mathbf{x}|a) = Q_{s_i\lambda}(\mathbf{x}|a)$$

Corollary 4 分割 $\lambda \in SP$ が i-*removable* とする。

パラメータ列 a の i 番目が $-z_k$ で、$i+1$ 番目が $-z_{k+1}$ であり,
これ以外には、z_k および z_{k+1} が登場しないとき

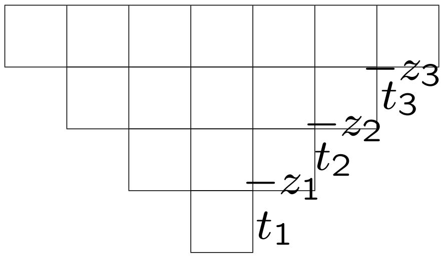
$$\partial_k Q_\lambda(\mathbf{x}|a) = Q_{s_i\lambda}(\mathbf{x}|a)$$

Theorem 5 *(Ikeda-Mihalcea-N.'11)* 最長元 $w_0^{(n)} = [\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}]$ に対応する *double Schubert* 多項式は、次で与えられる。

$$Q_{\rho_n + \rho_{n-1}}(\mathbf{x} | t_1, -z_1, t_2, -z_2, \ldots)$$

ここで、$\rho_n = (n, n-1, n-2, \ldots, 1)$

$n = 4$ なら $Q_{7,5,3,1}(\mathbf{x} | t_1, -z_1, t_2, -z_2, t_3, -z_3)$



Theorem 6 パラメータ列 a を、$t_1, t_2, \ldots$ および $-z_1, -z_2, \ldots$ から重複なく、しかも t と z のそれぞれの変数について添え字の番号が小さい順になるように全てならべられたものとする。

このとき、任意の *strict partition* $\lambda \in SP$ について、

$$Q_\lambda(x|a)$$

は、C 型のある *double Schubert* 多項式に一致している。

たとえば、$a = (t_1, t_2, -z_1, t_3, -z_2, -z_3, -z_4, t_4, \ldots)$ のとき

$Q_{421}(x|a)$ は、$w = [\bar{2}, \bar{3}, \bar{1}, 4, 5]$ に対する d. Schubert 多項式

$Q_{734}(x|a)$ は、$w = [\bar{3}, 1, 2, \bar{4}, 5]$ に対する d. Schubert 多項式

証明の方針

$Q_\lambda(x|a)$ が、最長元 $w_0^{(n)}$ の double Schubert 多項式 $Q_{\rho_n+\rho_{n-1}}(x|t_1,-z_1,t_2,-z_2,...)$ から、∂_i または、δ_i を施していって作られることを示す。（そのような列を具体的に作るアルゴリズムを与える）

Key lemma: パラメータ列 a の長さ 3 以上の連続した変数の列には、必ず、ある i について (t_i と t_{i+1}) または、($-z_i$ と $-z_{i+1}$) を含む。

ステップ(1) λ に、うまく箱をつけていって、逆台形の形になるようにする。

ステップ(2) 底辺の処理 (t と z のうち、数の多い方を用いて箱を増やす)

ステップ(3) パラメータ $(t_1,-z_1,t_2,-z_2,...)$ で、分割が $\rho_n+\rho_{n-1}$ の形になるようにする。

Definition 7 *(Anderson-Fulton '12)*
C 型の三つ組 $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ とは、
３個の正整数の列

$$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \text{ ただし、} k_1 < k_2 < \cdots < k_s$$

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_s) \text{ ただし、} p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_s$$

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_s) \text{ ただし、} q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_s$$

であって、すべての i $(1 \leq i \leq s-1)$ について次の条件式を満たすものである。

$$(p_i - p_{i+1}) + (q_i - q_{i+1}) > k_{i+1} - k_i$$

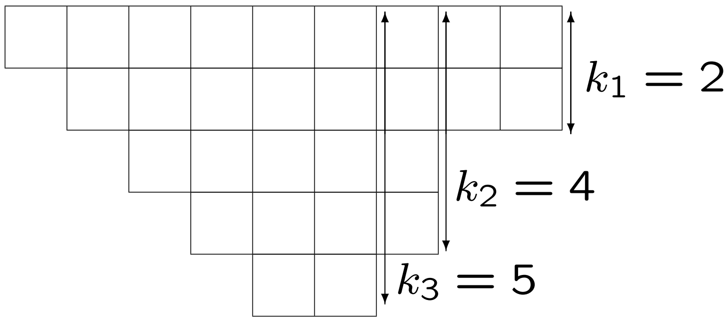
C 型の三つ組 $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ に対して、
strict partition $\lambda = \lambda(\boldsymbol{\tau})$ を、次のように定めることができる。

第 k 成分 λ_k を、ある i について $k = k_i$ となっているときは、$\lambda_k = p_i + q_i - 1$ とし、それ以外なら、$k_{i+1} < k < k_i$ となる i を用いて $\lambda_k = \lambda_{k_i} + k_i - k$ と定める。

例）$\mathbf{k} = (2, 4, 5)$, $\mathbf{p} = (5, 3, 1)$, $\mathbf{q} = (4, 2, 2)$ のとき

$$\lambda = (9, 8, 5, 4, 2)$$

$=$



C 型の三つ組 $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ に対して、次の性質を満たすような $W(C_n)$ の元 $w = w(\boldsymbol{\tau})$ を一意に定めることができる。

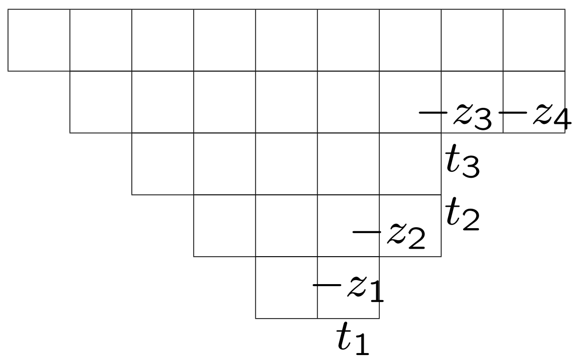
$1 \leq i \leq s$ を満たす各整数 i に対して、

$$\#\{a \geq p_i \mid w(a) = \bar{b}, b \geq q_i\} = k_i$$

が成立する $w \in W(C_n)$ のうちで、長さが最小の w を $w(\boldsymbol{\tau})$ とする。

例）$\mathbf{k} = (2, 4, 5),\ \mathbf{p} = (5, 3, 1),\ \mathbf{q} = (4, 2, 2)$ のとき、

$$\begin{array}{cccccccc} & & p_3 & & p_2 & & p_1 & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ w(\boldsymbol{\tau}) = [& \bar{6}, & 1, & \bar{3}, & \bar{2}, & \bar{5}, & \bar{4}, & 7] \end{array}$$



パラメータ $(t, z)_{\boldsymbol{\tau}} = (t_1, -z_1, -z_2, t_2, t_3, -z_3, -z_4)$

Theorem 8 *Parabolic quotient* $W^I = W/W_I$ の最長元 v^I は、*vexillary* であり、対応する *double Schubert* 多項式は、次の形で与えられる。

パラメータ列は、$(-z_1, t_1, -z_2, t_2, ...)$ で、分割は λ_I

ここで、λ_I は W の生成元の集合を S としたとき、$S - I$ に対応する頂点のカドのみを最長元の場合の *Young* 図形で残してできた *Young* 図形に対応する分割である。

C 型の 3 つ組では、$s = |S - I|$, $S - I = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ として、

$1 \leq i \leq s$ なる i に対して、$k_i = n - j_i$, $p_i = q_i = j_i + 1$