

Dual Grothendieck polynomials and finite sum Cauchy formula

成瀬 弘（岡山大・教育）

Alain Lascoux (Université de Marne-la-Vallée)

2013.09.25 日本数学会年会 (於愛媛大学) 一般講演

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{P}$ 分割

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$

Schur関数 $s_\lambda(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]^{S_\infty}$

(グラスマン元に対応した)

stable Grothendieck多項式 $G_\lambda(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]^{S_\infty}$

Cauchy 等式

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(\mathbf{x}) s_\lambda(\mathbf{y})$$

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} G_\lambda(\mathbf{x}) g_\lambda(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Theorem 1 (*Lenart '00*)

$$G_\lambda(\mathbf{x}_n) = \sum_{\mu \supseteq \lambda} (-1)^{|\mu| - |\lambda|} g_{\lambda, \mu} s_\mu(\mathbf{x}_n)$$

$$\text{ここで、} g_{\lambda, \mu} = \# \left\{ \begin{array}{l} T : \text{column \& row strict tableau} \\ T; \text{shape}(T) = \mu/\lambda \\ \text{第} i \text{ 行の成分は } 1, 2, \dots, i-1 \text{ の中から} \end{array} \right\}$$

Theorem 2 (*Lenart '00*)

$$s_\lambda(\mathbf{x}_n) = \sum_{\mu \supseteq \lambda} f_{\lambda, \mu} G_\mu(\mathbf{x}_n)$$

$$\text{ここで、} f_{\lambda, \mu} = \# \left\{ \begin{array}{l} T : \text{semistandard tableau} \\ T; \text{shape}(T) = \mu/\lambda \\ \text{第} i \text{ 行の成分は } 1, 2, \dots, i-1 \text{ の中から} \end{array} \right\}$$

dual stable Grothendieck polynomial $g_\lambda(\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}[[y_1, y_2, \dots]]$

Lam-Pylyavskyy の定義

$$g_\lambda(\mathbf{y}) = \sum_{T \in SSTab(\lambda)} y^T, \quad y^T = \prod_i y_i^{T \text{ 中の } i \text{ を含む列の数}}.$$

例) $g_k(\mathbf{y}) = h_k(\mathbf{y}), \quad g_{21}(\mathbf{y}) = s_{21}(\mathbf{y}) + h_2(\mathbf{y})$

Theorem 3 (*Lam-Pylyavskyy '07*)

$$g_\mu(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda \subseteq \mu} f_{\lambda, \mu} s_\lambda(\mathbf{y})$$

Corollary 4

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(\mathbf{x}) s_\lambda(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} G_\lambda(\mathbf{x}) g_\lambda(\mathbf{y})$$

ここでは、*divided difference* 作用素 ∂_i は、関数に対して右から作用するものとする。

$$f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x}_n) \partial_i = (f - f^{s_i}) (x_i - x_{i+1})^{-1}$$

最長元 $\omega = [n, \dots, 1] \in S_n$ に対する *divided difference* 作用素

$$\partial_\omega = (\partial_{n-1})(\partial_{n-2}\partial_{n-1}) \cdots (\partial_1 \cdots \partial_{n-1})$$

多項式 $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ に対して、

$$f \partial_\omega = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\ell(\sigma)} f^\sigma \frac{1}{\Delta} \text{となる。}$$

ここで、
$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

Discrete Wronskian

$$f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \partial_\omega = (-1)^{\binom{n}{2}} \det \left(f_i(x_1) \partial_1 \dots \partial_j \right)_{\substack{i=1 \dots n \\ j=0 \dots n-1}},$$

multi Schur 関数

変数の集合の列 $X_1, X_2, \dots, X_n \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

$$s_\lambda(X_1, X_2, \dots, X_n) := \det \left(s_{\lambda_i - i + j}(X_i) \right)$$

Grothendieck 多項式 (の定義)

$$G_{\lambda}(\mathbf{x}_n)$$

$$= (-1)^{\binom{n}{2}} s_{\lambda_1+n-1}(x_1) s_{\lambda_2+n-1}(x_2-1) \dots s_{\lambda_n+n-1}(x_n-n+1) \partial_{\omega}.$$

$$= (-1)^{\binom{n}{2}} s_{\lambda_1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+n-1}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n - 1, \dots, \mathbf{x}_n - n+1)$$

dual Grothendieck 多項式 (の定義)

$$\begin{aligned} g_{\lambda}(\mathbf{x}_n) &= s_{\lambda_1+n-1}(x_1) s_{\lambda_2+n-2}(x_2+1) \dots s_{\lambda_n}(x_n+n-1) \partial_{\omega} \\ &= s_{\lambda}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n + 1, \dots, \mathbf{x}_n + n-1) \end{aligned}$$

ここで、

$$s_k(x-m) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{m}{i} x^{k-i}, \quad s_k(x+m) = \sum_{i=0}^k \binom{m+i-1}{i} x^{k-i}$$

分割 λ に対して、 $s_\lambda(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{2n-1})$ は、Schubert 多項式で、

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n) = s_\lambda(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{2n-1})|_{x_{n+1}=\dots=x_{2n-1}=1}$$

これを用いると、行列式公式が作れる。

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \in \mathcal{P}$$

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n) = \det \left(s_{\lambda_i + j - i}(\mathbf{x}_n + i - 1) \right)_{s \times s}$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) = {}^t\lambda \text{ 転置}$$

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n) = \det \left(e_{\mu_i + j - i}(\mathbf{x}_n + \mu_i - 1) \right)_{r \times r}$$

Proposition 5 (*Giambelli*型行列式公式)

$\lambda = (a_1, a_2, \dots, a_r | b_1, b_2, \dots, b_r)$: *Frobenius* 表示とすると、

$$g_{\lambda}(\mathbf{x}_n) = \det \left(g_{(a_i | b_j)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_n) \right)_{r \times r}$$

ここで、

$$\begin{aligned} g_{(a | b)}^{(i,j)}(\mathbf{x}_n) &:= \sum_{p=0}^a \sum_{q=0}^b \binom{p+i-2}{p} \binom{q+j-2}{q} g_{(a-p | b-q)}(\mathbf{x}_n) \\ &\quad + \sum_{t=2}^{\min(i,j)} \binom{a+i-t}{a} \binom{b+j-t}{b}. \end{aligned}$$

Proposition 6 λ を、分割とする。このとき次が成立する。

$$g_{\lambda}(\mathbf{x}_n + y) = \sum_{\mu \subseteq \lambda} y^{c(\lambda/\mu)} g_{\mu}(\mathbf{x}_n),$$

ここで、 $c(\lambda/\mu)$ は、 λ/μ の空でない列の数。

証明) jeu de taquin を用いて、Tableaux の間の全単射を作ることで示す。

Corollary 7

$$g_{\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_T x^T$$

Theorem 8 (*Lascoux-N.*)

$$\sum_{\lambda \subseteq r^n} G_\lambda(\mathbf{x}_n) g_\lambda(\mathbf{y}_n) = \sum_{\lambda \subseteq r^n} s_\lambda(\mathbf{x}_n) s_\lambda(\mathbf{y}_n)$$

注意： y の変数の個数は任意でよい。

Corollary 9

$$\sum_{\lambda} G_\lambda(\mathbf{x}) g_\lambda(\mathbf{y}) = \sum_{\lambda} s_\lambda(\mathbf{x}) s_\lambda(\mathbf{y}) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$