一般化された Hall-Littlewood 函数の母函数表示についての代数的証明と応用

成瀬　弘

山梨大学大学院総合研究部
教育学域

2017.3.25
日本数学会 at 首都大学東京

動機

シューベルト・カルキュラスに登場する種々の対称函数
Schur **函数、** Schur P-,Q-**函数、** Grothendieck **多項式**
などの母函数を作りたい。

Hall-Littlewood **函数** $Q_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$ **で、**
$t = 0$ **のとき** Schur **函数、** $t = -1$ **のとき、** Schur Q-**函数となる。**

[1] Hudson-Ikeda-Matsumura-N. ArXiv:1504.02828v3
Segre series

[3] Nakagawa-N. ArXiv:1604.00451v2
Hall-Littlewood **函数の一般コホモロジー版**, Gysin formula

Hall-Littlewood 函数 (Macdonald P.211)

通常の Hall-Littlewood 函数 Q_λ の定義とその母函数は、以下の通り。

Hall-Littlewood 函数の定義

非負整数列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ と不定元 t に対して $(r \le n$ のとき$)$

$$Q_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$$
$$:= (1-t)^r \sum_{w \in S_n/(S_1^r \times S_{n-r})} w\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda_r} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Hall-Littlewood 函数の母函数

$u_1, \ldots, u_r$ を不定元、$u^\lambda := u_1^{\lambda_1} \cdots u_r^{\lambda_r}$, $\mathbf{x}_n := (x_1, \ldots, x_n)$

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{N}^r} Q_\lambda(\mathbf{x}_n; t) u^\lambda = \left(\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - t x_j u_i}{1 - x_j u_i} \right) \times \prod_{1 \le i < j \le r} \frac{1 - u_j/u_i}{1 - t u_j/u_i}$$

Hall-Littlewood 函数 (Macdonald P.211)

通常の Hall-Littlewood 函数 Q_λ の定義とその母函数は、以下の通り。

Hall-Littlewood 函数の定義

非負整数列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ と不定元 t に対して ($r \le n$ のとき)

$$Q_\lambda(x_1, \ldots, x_n; t)$$
$$:= (1-t)^r \sum_{w \in S_n/(S_1^r \times S_{n-r})} w\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda_r} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Hall-Littlewood 函数の母函数

$u_1, \ldots, u_r$ を不定元、$u^\lambda := u_1^{\lambda_1} \cdots u_r^{\lambda_r}$, $\mathbf{x}_n := (x_1, \ldots, x_n)$

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{N}^r} Q_\lambda(\mathbf{x}_n; t) u^\lambda = \left(\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - t x_j u_i}{1 - x_j u_i} \right) \times \prod_{1 \le i < j \le r} \frac{1 - u_j/u_i}{1 - t u_j/u_i}$$

形式群

形式群について記号等を導入しておく。Formal group law (**形式群規則**) **とは、**

$$F(x, y) = x + y + \sum_{i,j \geq 1} a_{i,j} x^i y^j \in R[[x, y]]$$

で、$a_{i,j}$ **は、**

(1) **交換法則** $F(x, y) = F(y, x)$,

(2) **結合法則** $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$

を満たすことが要請されたものである。これを用いて、

$$P_F(z) := 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{1,i} z^i$$

とおく。また、x **の逆元を** $\bar{x}$ **で表す。**i.e. $F(x, \bar{x}) = 0$.

形式群の例

- $F(x,y)=x+y$, $P_F(z)=1$, $\bar{x}=-x$
- $F_{CK}(x,y)=x+y+\beta xy$, $P_F(z)=1+\beta z$, $\bar{x}=\frac{-x}{1+\beta x}$
- $F_{Ell}(x,y)=\frac{x+y+\beta xy}{1-\gamma xy}$, $P_F(z)=1+\beta z+\gamma z^2$, $\bar{x}=\frac{-x}{1+\beta x}$

以下、F は $\log_F$ と $\exp_F$ を用いて、

$$F(x,y)=\exp_F(\log_F(x)+\log_F(y))$$

で与えられるものとする。
不定元 t に対して、

$$[t]_F(x)=\exp_F(t\log_F(x))$$

と定める。

$[2]_F(x)=F(x,x)$, $[-1]_F(x)=\bar{x}$ となる。

一般化された Hall-Littlewood 函数の定義

$(1-t)x^k = \dfrac{x - tx}{x} x^k$ を、F で、変形して $x^{[k]^F}$ を次で定める。

$$x^{[k]^F} := \frac{F(x, [t]\bar{x})}{x} x^k$$

正整数列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ と形式群 F に対して、一般化された Hall-Littlewood 函数 $HQ_\lambda^F(x_1, \ldots, x_n; t)$ を次で定義する。

定義

$$HQ_\lambda^F(x_1, \ldots, x_n; t)$$
$$:= \sum_{w \in S_n/(S_1^r \times S_{n-r})} w \left(x_1^{[\lambda_1]^F} \cdots x_r^{[\lambda_r]^F} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{F(x_i, [t]\bar{x}_j)}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right)$$

一行 $(r=1)$ の Hall-Littlewood 函数の母函数

$$HQ_n^F(z) := \frac{1}{P_F(z)} \prod_{i=1}^{n} \frac{F(z,[t]_F(\bar{x}_i))}{F(z,\bar{x}_i)}$$

とおく。

補題

不定元 z についての形式冪級数 $N_n^F(z;x_1,\dots,x_n;t)$ で、次の等式を満たすものが一意に存在する。

$$\begin{aligned} HQ_n^F(z) &= N_n^F(z;x_1,\dots,x_n;t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i,[t]_F(\bar{x}_i))}{z-x_i} \prod_{j\neq i} \frac{F(x_i,[t]_F(\bar{x}_j))}{F(x_i,\bar{x}_j)}. \end{aligned}$$

すなわち、正整数 m について、$HQ_n^F(z)$ の z^{-m} の係数が、$HQ_{(m)}^F(x_1,\dots,x_n;t)$ となっている。

一行 ($r = 1$) の Hall-Littlewood 函数の母函数

$$HQ_n^F(z) := \frac{1}{P_F(z)} \prod_{i=1}^{n} \frac{F(z, [t]_F(\bar{x}_i))}{F(z, \bar{x}_i)}$$

とおく。

補題

不定元 z についての形式冪級数 $N_n^F(z; x_1, \ldots, x_n; t)$ で、次の等式を満たすものが一意に存在する。

$$\begin{aligned} HQ_n^F(z) &= N_n^F(z; x_1, \ldots, x_n; t) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i, [t]_F(\bar{x}_i))}{z - x_i} \prod_{j \neq i} \frac{F(x_i, [t]_F(\bar{x}_j))}{F(x_i, \bar{x}_j)}. \end{aligned}$$

すなわち、正整数 m について、$HQ_n^F(z)$ の z^{-m} の係数が、$HQ_{(m)}^F(x_1, \ldots, x_n; t)$ となっている。

$N_n^F(z; x_1, \ldots, x_n; t)$ の例

$F(x, y) = F_{CK}(x, y) = x + y + \beta xy$ **のとき、**

$$N_n^F(z; x_1, \ldots, x_n; t) = \frac{1}{1 + \beta z}$$

$F(x, y) = F_{Ell}(x, y) = \frac{x+y+\beta xy}{1-\gamma xy}$ **のとき、**

$$N_1^F(z; x_1; t) = \frac{1}{1 + \beta z + \gamma z^2} + \frac{\gamma w_1(x_1 + w_1 + \beta x_1 w_1)}{(1 - \gamma w_1 x_1)(1 - \gamma w_1 z)},$$

ただし、 $w_1 = [t]_F(\bar{x}_1)$.

λ が r 行の Hall-Littlewood 函数の母函数

$r \leq n$ とし、

$$HQ_n^F(z_1, \ldots, z_r) := \left(\prod_{i=1}^{r} HQ_n^F(z_i)\right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{F(z_j, \bar{z}_i)}{F(z_j, [t]_F(\bar{z}_i))}$$

と定める。

定理

正整数列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ に対して、
$HQ_n^F(z_1, \ldots, z_r)$ の $z_1^{-\lambda_1} \cdots z_r^{-\lambda_r}$ の係数は、
$HQ_\lambda^F(x_1, \ldots, x_n; t)$ に等しい。

証明は、r に関する帰納法による。(Macdonald の本の証明とほぼ同じでよい)

応用１（Giambelli rule）

２行の $\lambda = (k,\ell)$ **の** Hall-Littlewood **関数を一行の積の和で表す。**

$$HQ_n^F(z_1,z_2) = HQ_n^F(z_1)HQ_n^F(z_2)\frac{F(z_2,\bar{z}_1)}{F(z_2,[t]\bar{z}_1)}$$

$\boxed{t=-1,\ F(x,y)=x+y+\beta xy}$ **のとき、**

$$\frac{F(z_2,\bar{z}_1)}{F(z_2,[t]\bar{z}_1)} = \frac{1-z_1/z_2}{(1+\beta z_1)(1+(\beta+1/z_2)z_1)} = \sum_{i\geq j\geq 0} c_{i,j} z_1^i z_2^{-j}$$

$$c_{i,j} = (-1)^j \beta^{i-j}\left(2\binom{i}{j}+\binom{i}{j+1}-\delta_{j,0}\right)$$

たとえば、（$HQ_\lambda^F = GQ_\lambda$）

$$\begin{aligned} GQ_{3,2} \quad = \quad & (GQ_3 - 2\beta GQ_4 + 3\beta^2 GQ_5 - \cdots)GQ_2 \\ & -(2GQ_4 - 5\beta GQ_5 + 9\beta^2 GQ_6 - \cdots)GQ_1 \\ & +(2GQ_5 - 5\beta GQ_6 + 9\beta^2 GQ_7 - \cdots) \end{aligned}$$

応用2（Pieri rule）

$$HQ_n^F(z_1, z_2)\frac{F(z_2, [t]\bar{z}_1)}{F(z_2, \bar{z}_1)} = HQ_n^F(z_1)HQ_n^F(z_2)$$

両辺の $z_1^{-k}z_2^{-\ell}$ の係数を比較する。

$\boxed{t = -1,\ F(x, y) = x + y + \beta xy}$ **のとき、**

$$\frac{F(z_2, [t]\bar{z}_1)}{F(z_2, \bar{z}_1)} = \frac{(1 + \beta z_1)(1 + (\beta + 1/z_2)z_1)}{1 - z_1/z_2}$$

これから、たとえば

$$\begin{aligned} GQ_3GQ_2 &= GQ_{3,2} + 2GQ_{4,1} + 2GQ_5 \\ &\quad +\beta(2GQ_{4,2} + 3GQ_{5,1} + GQ_6) \\ &\quad +\beta^2(GQ_{5,2} + GQ_{6,1}) \end{aligned}$$

などがわかる。

今後の課題

- Schur positivity
- Tableaux formula
- Factorial 版
- Littlewood-Richardson rule
- ホモロジー Hall-Littlewood 函数の母函数
- p-コンパクト群の等質空間のコホモロジーの Schubert 基底 $(t = \sqrt[p]{1})$
- 表現論的、圏論的アプローチ

等

Thank You!

Supported by **科研費** 16H03921 **基盤研究** (B)
「シューベルト・カルキュラスの深化」