

置換群の可移拡大の組合せ論的計算法

宮本 泉

山梨大学*

$X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ とし, G_0 は $X \setminus \{0\}$ 上に $(t-2)$ 重可移で $(t-1)$ 重可移ではない置換群とする. G_0 が群 G における 0 の固定部分群となると G は G_0 の可移拡大という. G_0 が X の t 点対 X^t に作用したときの orbit をを集めて結合をすることによって, G の X^t 上の orbit を構成するアルゴリズムを [4] で示した. そのアルゴリズムを手計算で実行することによって $G = PSL(m, 2)$ と $Sp(2m, 2)$, $m \geq 3$, の場合に, 一般的に可移拡大の群の X^t 上の orbit を求めることができた. また, 可移拡大の群にに対して, この操作を拡大が存在しなくなるまで繰返し行った.

定義 [1]. (X, Π) が t -superscheme であるとは, \iff

S1. $\Pi = \{\Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^t\}$, $t \geq 2$, で Π^l は $1 \leq l \leq t$ において X^l の分割,

S2. $\sigma \in Sym(l)$ について, $\sigma((y_1, y_2, \dots, y_l)) = (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(l)})$ とおき, $\Pi^l = \{R_0^l, R_1^l, \dots, R_{d_l}^l\}$, $1 \leq l \leq t$, とおくと, すべての R_k^l と $\sigma \in Sym(l)$, に対して, $\sigma(R_k^l) \in \Pi^l \dots$ (symmetric)

S3. projection $\pi_j^l : X^l \rightarrow X^{l-1}$ を

$\pi_j^l((y_1, y_2, \dots, y_l)) = (y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_l)$ で定義すると,
すべての $R_k^l \in \Pi^l$, $2 \leq l \leq t$ に対して, $\pi_j^l(R_k^l) \in \Pi^{l-1}$,

S4. すべての R_k^l , $2 \leq l \leq t$, と, すべての $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{l-1}) \in \pi^l(R_k^l)$ に対して, constant $p_k^l = |(\pi^l)^{-1}(\mathbf{y}) \cap R_k^l|$ が存在. 特に, $p_k^l = |R_k^l|/|\pi^l(R_k^l)|$. \dots (regular)

G が X 上の置換群のとき, Π^l を G が X^l , $1 \leq l \leq t$ に作用したときの orbit とすると, (X, Π) は, $\Pi = (\Pi^1, \Pi^2, \dots, \Pi^t)$ において, superscheme になる. $X^{(l)} = \{(x_1, x_2, \dots, x_l) | x_i \text{ 相異なる} \}$ とおく. G が X 上可移のとき, $X^{(l)}$ 上の orbit だけ考えれば十分なので, superscheme (X, Π) で, $\Pi^{(l)} = \{R_i^l | R_i^l \in \Pi^l \text{ and } R_i^l \subseteq X^{(l)}\}$, $1 \leq l \leq t$ とおく.

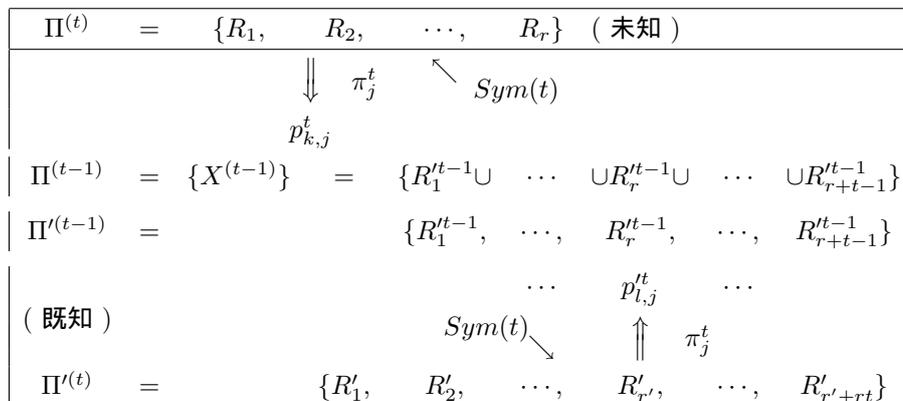
一般に考える問題は次の様になる. G_0 は $X \setminus \{0\}$ 上に $(t-2)$ 重可移で, $(t-1)$ 重可移ではないとする. G_0 の X 上における可移拡大 G が存在するとする. (X, Π) を G の

*imiyamoto@yamanashi.ac.jp

表 1: $PSL(m, q)$ における P_l の固定部分群の $\mathbf{P}^{(2)}$ 上の orbit と $PSL(m, q)$ の $(\mathbf{P} \cup \{P_0\})^{(3)}$ 上の orbit

No.	点 P_l の固定部分群		$PSL(m, q)$		property
	size	rep.	size	rep.	
1	$n(q-1)$	(P_i, P_j)	$(n+1)n(q-1)$	(P_i, P_j, P_l)	$P_j \in \langle P_i, P_l \rangle$
2	$n(n-q)$	(P_i, P_j)	$(n+1)n(n-q)$	(P_i, P_j, P_l)	$P_j \notin \langle P_i, P_l \rangle$
3	n	(P_l, P_i)	$(n+1)n$	(P_0, P_i, P_l)	
4	n	(P_i, P_l)	$(n+1)n$	(P_i, P_0, P_l)	
5			$(n+1)n$	(P_i, P_l, P_0)	

作る t -superscheme (X, Π') を G_0 の作る t -superscheme とする . 下の図表を参照して、 $R_k = \bigcup_{l \in Y_k} R'_l, \quad 1 \leq k \leq r.$ を構成する。



性質 S2 の $\text{Sym}(t)$ は、 X^t の成分上に作用して、orbit 番号 $\{1, 2, \dots, r\}$ と $\{1, 2, \dots, r' + rt\}$ 上の置換群を誘導する。ただし、 $\Pi^{(t)} = \{R_1, R_2, \dots, R_r\} = G$ の $X^{(t)}$ 上の orbit, $\Pi'^{(t)} = \{R'_1, R'_2, \dots, R'_{r'+rt}\} = G_0$ の $X^{(t)}$ 上の orbit であり、 $Y = \{1, 2, \dots, r' + rt\}$ とおく。

注 : $\text{Aut}((X, \Pi))$ は G を含む $(t-1)$ -重可移で t -重可移ではない群になる。可移拡大が無いときにも (X, Π) が得られることはある。そのときは、 $\text{Aut}((X, \Pi))$ は可移にならない。(計算機による実験の結果)

例: $PSL(m, q), m \geq 3$

$G = PSL(m, q), m \geq 3, X = \mathbf{P}$ (q 元体上の $m-1$ 次元射影空間). $G_0 = G$ における点 P_l の固定部分群 (stabilizer). $t = 3, n = |\mathbf{P} \setminus \{P_l\}| = q + q^2 + \dots + q^{m-1}$. 表 1 の左部分が $\Pi'^{(t-1)}$ のデータで、 G は $X^{(3)}$ 上に 2 個の orbit R_1 と R_2 をもち、その size は $(n+1)n(q-1)$ and $(n+1)n(n-q)$. 性質 S2 の $\text{Sym}(3)$ は $\Pi^{(3)} = \{R_1, R_2\}$ に自明に作用などが分かる。

表 2 より、答 (一般の場合): $Y_1 = \{1(1, \dots, q-2), 5, 8, 10, 12\}, Y_2 = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13\}$. 特別な場合の答: $q = 2$ の場合、5 と 6orbit のデータが一致するので、 $Y_1 = \{5, 8, 10, 12\}$ or

$Y_1 = \{6, 8, 10, 12\}$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$, $m = 3$, かつ $q = 4$ の場合、5 と $6(1,2,3)$ の 4 個の orbit のデータが一致するので、 $Y_1 = \{1(1, \dots, q-2), i, 8, 10, 12\}$, ここで、 i は $\{5, 6(1), 6(2), 6(3)\}$ の中の一つ、 $Y_2 = Y \setminus Y_1$ を得る。(このとき、 $\text{Aut}((X, \Pi)) = \text{PTL}(3, 4)$: 計算機実験) $\text{PSL}(m, q)$ 自身の可移拡大は、 $t = 4$, $Y = \{1, 2, \dots, 15\}$ 、表 1 の右部分と $\text{PSL}(m, q)$ の $(P \cup \{P_\infty\})^{(4)}$ 上の orbit の表 (省略) から計算する。答無し (一般の場合)、 $\text{AGL}(m, 2), M_{22}$ (特別な場合) が得られる。引続き計算すると、 $\text{AGL}(m, 2)$ の拡大は非存在、 M_{22} は 24 次 Mathieu 群まで拡大が可能で、その先は拡大無し。 $\text{Aut}(M_{22})$ の拡大も非存在がわかる。 $\text{AGL}(m, 2)$ のときの答は $Y_1 = \{6, 8, 10, 12, 14\}$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$ となり、先の場合の答が複数あったことが拡大の存在に関係している。Mathieu 群の場合も同様である。 M_{22} を得るときのスーパースキームの自己同型群は $\text{Aut}(M_{22})$ であることは計算実験で確認しているが、その後の拡大の計算機実験はできていない。

$G = \text{Sp}(2m, 2)$ の $O^+(2m, 2)$ と $O^-(2m, 2)$ for $m \geq 3$ による coset 上への作用の場合も、同様に、可移拡大の計算に成功している。

計算機による実験には GAP を使用している。

有限単純群の分類を使用した 2 重可移群の分類については文献 [3] を、スーパースキームについては文献 [5, 2] を参照されたい。

Q@I@@

- [1] G. Ivanyos: On the combinatorics of evdokimov's deterministic factorization, *Draft preprint*, 1997.
- [2] K. W. Johnson and J. D. H. Smith: Characters of finite quasigroups IV: products and superschemes, *European J. Combin.*, **10**, 1989, 257–263.
- [3] W. M. Kantor: Some consequences of the classification of finite simple groups, *Contemporary Math.*, **45**, 1985, 159–173.
- [4] 宮本泉: アソシエーションスキームの拡張と 2 重可移群の計算. 数理解析研究所講究録. *Computer Algebra – Algorithms, Implementations and Applications*, to appear .
- [5] J. D. H. Smith: Association schemes, superschemes, and relations invariant under permutation groups, *European J. Combin.*, **15**(3), 1994, 285–291.

表 2: $PSL(m, q)$ における P_l の固定部分群の $P^{(3)}$ 上の orbit

No.	size	rep.	property
1(1)	$n(q-1)$	(P_i, P_j, P_k)	$P_j, P_k \in \langle P_l, P_i \rangle$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$1(q-2)$	$n(q-1)$	(P_i, P_j, P_k)	$P_j, P_k \in \langle P_l, P_i \rangle$
2	$n(q-1)(n-q)$	(P_i, P_j, P_k)	$P_j \in \langle P_l, P_i \rangle, P_k \notin \langle P_l, P_i \rangle$
3	$n(q-1)(n-q)$	(P_i, P_j, P_k)	$P_j \notin \langle P_l, P_i \rangle, P_k \in \langle P_l, P_i \rangle$
4	$n(q-1)(n-q)$	(P_i, P_j, P_k)	$P_j \notin \langle P_l, P_i \rangle, P_k \in \langle P_l, P_j \rangle$
5	$n(q-1)(n-q)$	(P_i, P_j, P_k)	$P_j \notin \langle P_l, P_i \rangle, P_k \in \langle P_i, P_j \rangle$
6	$n(q-1)^2(n-q)$	(P_i, P_j, P_k)	$P_k \in \langle P_l, P_i, P_j \rangle$, non collinear
$6(1, 2, 3)$	$n(q-1)^2(n-q)/3$	(P_i, P_j, P_k)	as above and $m = 3 q-1$
7	$n(n-q)(n-q-q^2)$	(P_i, P_j, P_k)	$P_k \notin \langle P_l, P_i, P_j \rangle$, non collinear
8	$n(q-1)$	(P_l, P_i, P_j)	$P_j \in \langle P_l, P_i \rangle$
9	$n(n-q)$	(P_l, P_i, P_j)	$P_j \notin \langle P_l, P_i \rangle$
10	$n(q-1)$	(P_i, P_l, P_j)	$P_j \in \langle P_l, P_i \rangle$
11	$n(n-q)$	(P_i, P_l, P_j)	$P_j \notin \langle P_l, P_i \rangle$
12	$n(q-1)$	(P_i, P_j, P_l)	$P_j \in \langle P_l, P_i \rangle$
13	$n(n-q)$	(P_i, P_j, P_l)	$P_j \notin \langle P_l, P_i \rangle$

$Sym(3)$ は $\{2, 3, 4\}$, $\{8, 10, 12\}$, $\{9, 11, 13\}$ へ可移に作用.

projection の性質

No.	π_1		π_2		π_3	
	im.	mult.	im.	mult.	im.	mult.
$1(1, \dots, q-2)$	1	1	1	1	1	1
2	2	$q-1$	2	$q-1$	1	$n-q$
3	2	$q-1$	1	$n-q$	2	$q-1$
4	1	$n-q$	2	$q-1$	2	$q-1$
5	2	$q-1$	2	$q-1$	2	$q-1$
6	2	$(q-1)^2$	2	$(q-1)^2$	2	$(q-1)^2$
$6(1, 2, 3)$	2	$(q-1)^2/3$	2	$(q-1)^2/3$	2	$(q-1)^2/3$
7	2	$n-q-q^2$	2	$n-q-q^2$	2	$n-q-q^2$
8	1	1	3	$q-1$	3	$q-1$
9	2	1	3	$n-q$	3	$n-q$
10	3	$q-1$	1	1	4	$q-1$
11	3	$n-q$	2	1	4	$n-q$
12	4	$q-1$	4	$q-1$	1	1
13	4	$n-q$	4	$n-q$	2	1

第 k 行: im.= orbit 番号 s で、次を満たす $R_s^{t-1} = \pi_j(R_k^t)$.

mult.= $p_{k,j}^3 = |R_k^t|/|R_s^{t-1}|$ となっている.