なぜ微分方程式を学ぶのか

—平成 23 年度機械情報コース「微分方程式 I」開講にあたって—

機械システム工学科　近藤英一

微分方程式とは

次の式を見て欲しい。

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1}$$

このように未知関数—この場合 y が未知—の微分を含む方程式を微分方程式という。この式を解くのは簡単である。

では

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{2}$$

はどうだろうか。微分すると自分自身になる関数は e^x しかない。したがって c を定数[*1]として $y = e^x + c$ である。

「微分方程式」の講義では、このような微分方程式の性質や解き方を学ぶ。

微分方程式で物理現象を表せるということ

物体を垂直に投げ上げたときの運動を高校の物理で習った。時刻 $t = 0$ において速度 v_0 で質量 m の物体を投げ上げると、速度は $v(t) = v_0 - gt$、位置は $x(t) = v_0 t - gt^2/2$ である。

ではもし空気抵抗の影響を考えたらどだろう。高校では習わないが、空気抵抗が速度に比例するとして—その比例定数を k とおく—速度の時間変化は $v(t) = -mg/k + (v_0 + mg/k)e^{-kt/m}$ になる。たいして複雑な式ではないから公式として覚えておけばいいだろ

[*1] 任意定数という。積分定数とは言わない。

うか？では空気抵抗が（気圧などの影響で）高さとともに変化したら？物体が質点でなかったら？本当に速度に比例するのか、比例しない場合はどうだろう、などなどと考えていくと、登場する式も場合々々に応じてさまざまになって、きりがなくなってしまう。すべての場合について解答の式を求めておくことはとてもできたものではない。大切なのは物理現象の本質で、さらにそれを数式に表すためにどのような方法があるかということである。

自然の振る舞いのうち非常に多くが微分量つまり変化量と関係している。なぜなら、自然現象とは変化するものだから。変化がなかったら宇宙は無のままで、我々も存在していない。自然現象は、作用に対する変化あるいは変化に対する応答のつながりとして表されるのだ。上の運動の例は、時間や位置で速度の大きさが変化し、速度が変化すると抵抗力も変化している。変化やその間のつながりを記述するためには—もっと広く言えば自然の振る舞いを数式で表すためには—微分量の組み合わせの式つまり微分方程式を用いるのが簡単で一般性があるのだ。

微分方程式は「変化のしかけを表す」あるいは変化同士のつながりを表す式である。位置とか速度とかいった実際の観測量を現す方程式は場合々々に異なるかもしれない、いってみれば個別の式である。その個別の解が微分方程式を解くことによって求められる。上の抵抗のない投げ上げの例では、自然法則（運動方程式）を表す微分方程式 $mdv/dt = -mg$ を初期条件 $v(0) = v_0$ で解くことで解 $v(t) = v_0 - gt$ が得られたのである。空気抵抗がある場合には抵抗の項をを含む微分方程式をたてて解けばよい。ちなみにその式は $mdv/dt = -mg - kv$ である。微分方程式のほうが簡単で美しい式であることがわかるだろう。

微分方程式で図形の性質を表せるということ

もうひとつ、微分方程式の大切な役割がある。それは「図形を表す」ということである。$y = x^2$ と $y = x^2 + 2$ は違う方程式であるがが、両方とも位置は異なるものの同じ放物線である。その意味で $y = x^2$ と $y = x^2 + 2x + 1$ も同じ図形である。$y = x^2$ と $y = 2x^2$ は同じ図形ではないが、放物線という点では同じである。このように、関数としては異なっていても同じ性質をもった図形は同じ微分方程式で表すことができる。（いまの例ではどのような微分方程式になるだろうか、ぜひ考えてみて欲しい。）図形とは値の連続的な変化を表したものだから、微分方程式は図形そのものであるといえるだろう。

先の投げ上げ運動であるが、物体の軌跡—この場合時間と位置の関係—は放物線になる。投げる時刻や位置を変えても、投げ方が同じで作用する法則も同じなら図形としての

軌道は同じだ。時間経過と位置の変化、力を変えた場合の変位、電圧を変えた場合の電流の変化といったぐあいに、異なるものの間のしかけつまりは変化のしかけを表すものが物理法則で、その関係はグラフや図形として表現できるのであるから、微分方程式でも記述できることになる。

「微分方程式」の講義の重要性がわかっただろうか。本当は「立て方」のほうが重要なのだが、それは物理の話である。したがってここでは、主に「解き方」の数学を学ぶ。数学といっても応用数学あるいは実用数学とでもいうもので、役に立つ数学ですから安心して欲しい。[*2]

もうすでに専門科目

機械システム工学科は、さまざま機械の仕組みや製造の技術を学ぶところである。諸君の中には、大学に入学したらすぐにもそんな専門の勉強ができるかと思っていたのに、毎日数学や物理や語学の勉強ばかりでつまらない、と思っている者もあることだろう。数学なんて本当に使うのか、学ぶ意味があるのか、と思うかもしれない。

先ほど、ここで学ぶのは応用数学だ、と述べた。もし君が数学科に進学していたとすれば、2 年生のいまごろは、解析学、代数学、集合や位相、幾何学などを学んでいることであろう。微分方程式は 3 年生で応用科目として学ぶ。そして数学家は微分方程式の数学的な振る舞いに興味があるか、あるいはもっと複雑な数学的問題を解くための道具として使うのであって、現実の現象を解析するのではない。

微分方程式は、数学としては応用の部類で、しかも工学部で学ぶわれわれは現実の問題を解くための手段として勉強する。微分方程式という学問分野の中の極めて実用的部分を勉強するわけだから、そうは見えないかもしれませんが実はすでに専門科目になっているのである。

機械工学ではどのような微分方程式が登場するか

学年がすすむにつれて専門的な科目がすこしづつ増えてくる。そんな教科でこれから目にするであろう微分方程式の例をいくつか書き表してみよう。もちろん徐々に勉強していくのだから、いまは眺めているだけで良い。

[*2] 私は数学の専門家ではありませんから、厳密には正しくない記述もあったかもしれません。でも、数学や物理の本には書いていない、実用工学を学ぶ上で大変重要な点についてはきちんと説明したつもりです。

位置や電圧などの制御の理論の分野に登場する式の例：

$$b_m \frac{d^m v_o(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} v_o(t)}{dt^{m-1}} + \cdots\cdots + b_1 \frac{dv_o(t)}{dt} + b_0 v_o(t) =$$

$$a_n \frac{d^n v_i(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_i(t)}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + a_1 \frac{dv_i(t)}{dt} + a_0 v_i(t) \tag{3}$$

機械の振動や計測用の光の性質の分野に登場する式の例：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

機械の材料の強度や変形の分野に登場する式の例：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

風の流れや機械の中のオイルなど流れの分野に登場する式の例：

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \right) = 0 \tag{6}$$

われわれは、諸君が将来、開発や生産を行うエンジニアになることを前提に教育をしている。組立工やコンビニ店長になってもらうためではない。（もちろん自らそれを望むのは自由である。）エンジニアには、材料や制御や機構や熱や流体の理論を道具のように使えることが求められる。そういった分野の本を書店や図書館で手にとってみて欲しいい。微分方程式がたくさん登場することに気がつくであろう。

微分方程式を学ぶことはエンジニアになるための重要な道程である。この講義では「機械の専門書（科目)」のなかの数学の部分だけを抜き出して補講をしていると考え、張り切って学習に臨んで欲しい。

微分方程式を学ぶ意義　まとめ

- 微分方程式は変化のしかけを表す。だから微分方程式で物理現象の概念を記述でき、工学にたくさん登場する。
- 図形の性質は微分方程式で表せる。物理現象は図形で記述できるから、その性質は微分方程式でも表せる。
- 微分方程式は概念・性質をあらわしているので、実際に利用可能な方程式は微分方程式を解いて求める。この授業では主に解き方を学ぶ。