Chap. 1 Introduction

この本の目的 (p1-L1)

メソスケールの力学的モデルを使ったシミュレーションを
有効に利用するためには
・モデルで使っている物理と数学の基礎を理解し、
・注目する現象がどう振舞うのか理解する必要がある
→その概要を提供する
　実務をやる人も研究者も対象にしていて、また、
　いろんなモデルの科学的な基礎を評価するのにも使える

この本で扱うメソスケールとは(p1-L9)

・空間的に：レーウィンゾンデの観測網より小さく、個々の積雲より大きい
　つまり数キロから数百キロ
・時間的に：本書では数時間から二十四時間くらいまでに注目する
・鉛直に：数十メートルから対流圏界面（十数キロ）まで
これは
☆天気図でみることができる一番小さい現象から、
　天気図では直接見ることができず
　天気予報では統計的に扱われる現象まで
☆静水圧近似がよく当てはまるくらい大きいが、
　地衡風や傾度風はよく当てはまらないくらい小さいスケール
に対応する。
→計算機と費用に加えて、このスケールに合うようにメソモデルの
　領域と解像度を決める

この本の内容(p1-L28)

・二、三章：基礎になる保存則を導入し、それを適切に単純化する
・四章：メソモデルのグリッドにあうように方程式系を平均する
・五章：モデルの形式とメソスケールの現象を表現する上での
　それぞれの長所と短所を述べる
・六章：方程式系を一般化座標で表示する
・七章〜九章：大気境界層、放射、水蒸気を含む熱力学についての
　パラメタリゼーションを導入
・十章：数値解法の紹介
・十一章：境界条件と初期条件、グリッドの構造
・十二章：メソモデルの評価法
・十三章：メソスケールの気象現象のシミュレーションの例
・付録B：いくつかの最新式のメソモデルのまとめ

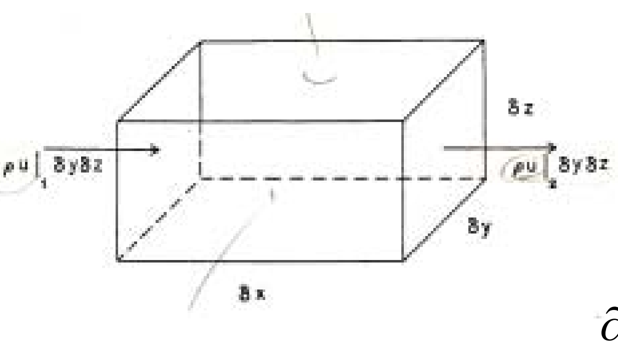
Chap. 2 Basic Set of Equations

1.質量の保存式
2.熱エネルギーの保存式
3.運動量の保存式
4.水の保存式
5.水蒸気以外の気体やエアロゾルの保存式

- 同時に満たされる
- それぞれに生成/消滅項を含む

2.1 質量の保存式

- 一次元で考える(p3L13-p4L8)



考えているboxに右から入ってくる質量と
左から出ていく質量の差がbox内の質量の時間変化

$$[\rho u|_1 - \rho u|_2]\delta y\delta z = \frac{\delta M}{\delta t}$$

$$\rho u|_2 = \rho u|_1 + \left.\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right|_1 \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \rho u}{\partial x^2}\right|_1 (\delta x)^2 + \cdots$$

Taylor展開

$M = \rho V \qquad V = \delta x\delta y\delta z$

$$-\left.\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right|_1 \delta x\delta y\delta z + o(\delta x^2) = V\frac{\delta\rho}{\delta t}$$

- 三次元に拡張(p4L19-p5L3)

$$-\left.\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right|_1 \delta x\delta y\delta z - \left.\frac{\partial \rho v}{\partial y}\right|_1 \delta x\delta y\delta z - \left.\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right|_1 \delta x\delta y\delta z + o(\delta x^2, \delta y^2, \delta z^2) = V\frac{\delta\rho}{\delta t}$$

$V = \delta x\delta y\delta z$ で割る

$$-\left.\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right|_1 - \left.\frac{\partial \rho v}{\partial y}\right|_1 - \left.\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right|_1 + o(\delta x, \delta y, \delta z) = \frac{\delta\rho}{\delta t}$$

$$\delta x \to 0, \delta y \to 0, \delta z \to 0, \delta t \to 0$$

$$\Rightarrow o(\delta x, \delta y, \delta z) \to 0, \frac{\delta\rho}{\delta t} \to \frac{\partial\rho}{\partial t}, \left.\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right|_1 \to \frac{\partial \rho u}{\partial x}$$

質量の保存則 (連続式)

$$-\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$-\left(\nabla \cdot \rho\vec{V}\right) = \partial\rho/\partial t \quad (2.2)$$ ベクトル形式

2.2 熱の保存式

・熱力学の第一法則（その1） (p5L4-p6L5)

$$dQ = dW + dI \quad (2\text{-}3)$$

熱力学の第一法則

加えられる熱量　系がする仕事　内部エネルギー変化

圧力による仕事

$dW = pdV \longrightarrow$ 単位質量あたりの式 $dw = pd\alpha$ (2-5)

・理想気体の状態方程式 (p6L6-p7L9)

・ボイルの法則（等温のとき気圧×体積は一定）
・シャルルの法則（等積のとき気圧÷気温は一定）
・アボガドロの仮説（等温，等圧のとき，同じ分子数の気体は種類によらず同じ体積）

から理想気体の状態方程式が得られる

$$p\alpha / T = R = R^* / \mu \quad (2\text{-}11)$$

R：気体定数　R^*：普遍気体定数（物質によらない）　α：比容（単位質量の気体が占める体積）　μ：分子量

・乾燥大気（水蒸気を含まない大気）への適用 (p7L10-p7L19)

ドルトンの法則（混合気体の全圧は各物質の分圧の和）と状態方程式から，混合気体の平均的な分子量は

$$\mu_{atm} = \sum_{i=1}^{N} m_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{N} (m_i/\mu_i)$$

と表せる。

m_i：各気体の質量割合　μ_i：各気体の分子量

乾燥大気に適用（表2-1のH_2O以外の値を適用）すると

$$\mu_{dry,atm} = 28.98 \qquad R_d = R^* \big/ \mu_{dry,atm} = 298\mathrm{JK^{-1}kg^{-1}}$$

・湿潤大気（水蒸気を含む大気）への適用 (p7L19-p8L19)

$$\mu_{atm} = 1 \Bigg/ \left(\frac{1-q}{28.98} + \frac{q}{18.02} \right) = \frac{28.98}{1+0.61q} = \frac{\mu_{dry,atm}}{1+0.61q}$$

理想気体の状態方程式(2-11)に代入

$$p\alpha = R^* T (1+0.61q) / \mu_{dry,atm} = R_d (1+0.61q) T$$

$$T_V = (1+0.61q)T$$

仮温度Tvを定義

$$p\alpha = R_d T_v \quad (2\text{-}13)$$

水蒸気が多くなると温度が高くなった（密度が小さくなった）のと同じ効果があることに注意

・完全微分 (p7L20-p8L15)

Fが独立な2変数で表される関数であるとき(F=F(x,y))

$$dF = (\partial F/\partial x)dx + (\partial F/\partial y)dy = Mdx + Ndy$$

このとき

$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ つまり $\partial^2 F \big/ \partial x \partial y = \partial^2 F \big/ \partial y \partial x$

が成り立てばdFは完全微分で，dFを積分する経路によらずFは決まる

仕事dwについて考えると

理想気体の状態方程式(2-13)を代入

$$dw = pd\alpha = d(p\alpha) - \alpha dp = R_d dT_v - \alpha dp$$

$$\partial M/\partial p = \partial R_d / \partial p = 0 \qquad \partial N/\partial T_v = \partial(-\alpha)/\partial T_v = -R_d / p$$

それゆえ、dwは不完全微分で，Wはdwを積分する経路によって値が変わる

・熱力学の第一法則（その２）　(p9L16-p11L3)

$I/M = e = e(T_v, \alpha)$　(2-15) 単位質量あたりの内部エネルギー

$de = \left(\partial e/\partial T_v\right) dT_v + \left(\partial e/\partial \alpha\right) d\alpha$

Jouleの実験から，理想気体に近いと $\left(\partial e/\partial \alpha\right) = 0$　（理想気体の定義でもある）

よって熱力学の第一法則は

$dh = \text{đ}w + de = p\,d\alpha + \left(\partial e/\partial T_v\right) dT_v$　とかける

$d\alpha = 0$ のとき（定積変化）を考えると

$\partial h/\partial T_v = \partial e/\partial T_v = C_\alpha$ 定積比熱（定積変化のとき温度を1Kあげるのに必要な熱量）

$dh = \text{đ}w + de = p\,d\alpha + C_\alpha dT_v$　(2-16)

・第一法則を書き直していく

deは完全微分だが，dhは不完全微分で積分経路に依存するので

dhを反映し、かつ完全微分の量を持ってきたい→エントロピー$ds = dh/T_v$

$ds = \text{đ}h/T_v = C_\alpha \left(dT_v/T_v\right) + \left(R_d/\alpha\right) d\alpha$　(2-17)

比容は観測できないので，観測可能な量だけで書き直す

状態方程式(2-13)より

$\ln\alpha = \ln R_d + \ln T_v - \ln p$

$d(\ln\alpha) = d(\ln T_v) - d(\ln p)$

$(1/\alpha)d\alpha = (1/T_v)dT_v - (1/p)dp$

$ds = \text{đ}h/T_v = (C_\alpha + R_d)\left(dT_v/T_v\right) - \alpha\,dp$ (2-18)

$dp = 0$ のとき（定圧変化）を考えると

$\text{đ}h = \left(C_\alpha + R_d\right) dT_v - \alpha\,dp$ より

$\partial h/\partial T_v = C_\alpha + R_d = C_p$　定圧比熱（定圧変化のとき温度を1Kあげるのに必要な熱量）

$$ds = \text{đ}h/T_v = C_p\left(dT_v/T_v\right) - \left(R_d/p\right) dp \quad (2\text{-}19)$$

・温位（仮温位）の導入　(p11L4-p11L24)

断熱変化（つまり等エントロピー変化）を考える $ds = dh/T_v = 0$

$\left(dT_v/T_v\right) = \left(R_d/C_p\right) dp/p$

$d\ln T_v = \left(R_d/C_p\right) d\ln p$ (2-20)

$\left(T_{v1}, P_1\right) \to \left(T_{v2}, P_2\right)$ まで積分（dsが全微分だから経路を考えずにできる）

$$\int_{T_{v1}}^{T_{v2}} d\ln T_v = \left(R_d/C_p\right)\int_{P_1}^{P_2} d\ln P = \ln\left(T_{v2}/T_{v1}\right) = \left(R_d/C_p\right)\ln\left(P_2/P_1\right)$$

$T_{v2}/T_{v1} = \left(P_2/P_1\right)^{R_d/C_p}$　Poissonの式

$P_2 = 1000hpa$ のときの T_{v2}　を温位（仮温位）と定義する

$$\theta = T_v\left(1000hpa/p\right)^{R_d/C_p} \quad (2\text{-}21)$$

$\ln\theta = \ln T_v + R_d/C_p\left(\ln 1000 - \ln p\right)$

$d(\ln\theta) = d(\ln T_v) - R_d/C_p\, d\left(\ln p\right)$

$\left(C_p/\theta\right) d\theta = \left(C_p/T_v\right) dT_v - R_d/p\, dp$

この右辺は(2-19)の右辺と同じ，よって

$$\left(C_p/\theta\right) d\theta = ds = \text{đ}h/T_v$$　温位の変化はエントロピーの変化と対応する

・温位（仮温位）の保存式　(p11L25-p12最後)

ある気塊を追跡したときの温位の時間変化を考える

$$\frac{C_p}{\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{ds}{dt}=\frac{1}{T_v}\frac{d'h}{dt}=S_\theta\frac{C_p}{\theta}$$

S_θ は生成・消滅項で、様々な物理過程に伴う加熱・吸熱を表現する(2-24)
具体的な定式化は後の章ででてくる

$$\rho_c\frac{\partial T}{\partial t}=\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)}$$

ここで，例えば一次元熱伝導方程式にでてくるような分子による熱伝導がはいっていないが
メソスケールでは対流等流体が動いて起こる熱交換の方が
分子による熱伝導よりも相対的にずっと大きいので無視してよい→Sec2.3.2,Cap3,Cap5でまた話す

気塊を追跡するラグランジュ的微分を
空間のある一点に視点を固定したオイラー的微分に書き直す

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{dz}{dt}=S_\theta$$

ラグランジュ的に追跡していた気塊の速度
$(dx/dt, dy/dt, dz/dt)$はすなわち風速(u,v,w)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-u\frac{\partial\theta}{\partial x}-v\frac{\partial\theta}{\partial y}-w\frac{\partial\theta}{\partial z}+S_\theta=-\vec{V}\cdot\nabla\theta+S_\theta \quad \text{(2-25)}$$

熱の保存式

前のページ（p11L24）までやっていたことにどんな意味があるかというと
・熱量そのままだと不完全微分だから使いにくく，エントロピーそのままだと観測できないから
　使いにくい→それらと対応するもっと使いやすい量（温位）を導入
・温位の変化がエントロピー変化，また加えられる熱量と関係があることを示したから
　様々な加熱・吸熱と対応する生成・消滅項を導入できる

2.3 運動量の保存式

$$\vec{F}/M = \vec{f} = \vec{a}$$ (2-26) ニュートンの第二法則を単位質量当たりに書き直したもの

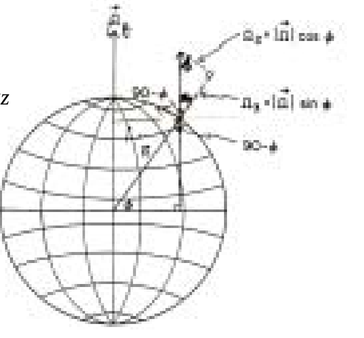
・回転する座標系からみた加速度の表示 (p13L1-p14L2)

$$\vec{a} = d_n V_n / dt$$ (2-27) 添え字nは慣性系からみた量
添え字なしは回転する座標系から見た量

少しまじめに考えると，ベクトル$\vec{R}$ について

$\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$ は慣性系の， $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は回転座標系の
基底ベクトルとすると

$$\underbrace{\vec{R} = \vec{i}_n R_{xn} + \vec{j}_n R_{yn} + \vec{k}_n R_{zn}}_{\text{慣性系での表示}} = \underbrace{\vec{i} R_x + \vec{j} R_y + \vec{k} R_z}_{\text{回転系での表示}}$$



回転座標系についての時間微分は

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{i}\frac{dR_x}{dt} + \vec{j}\frac{dR_y}{dt} + \vec{k}\frac{dR_z}{dt}$$

慣性座標系についての時間微分は

$$\frac{d_n\vec{R}}{dt} = \vec{i}\frac{dR_x}{dt} + \vec{j}\frac{dR_y}{dt} + \vec{k}\frac{dR_z}{dt} + R_x\frac{d\vec{i}}{dt} + R_y\frac{d\vec{j}}{dt} + R_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

ここで，回転座標系は角速度ベクトル$\vec{\Omega}$で
慣性系に対して回転しているので

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{i} \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{j} \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{k}$$

$$\frac{d_n\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\Omega}\times\vec{R}$$

$$\vec{V}_n = \vec{V} + \vec{\Omega}\times\vec{R}$$ (2-28)

$$\frac{d_n}{dt} = \frac{d}{dt} + \vec{\Omega}\times$$ (2-29)

$$\vec{a} = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\Omega}\times\right)\vec{V}_n = \boxed{\left(d\vec{V}/dt\right)} + \boxed{2\left(\vec{\Omega}\times\vec{V}\right)} + \boxed{\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{R}\right)}$$ (2-30)

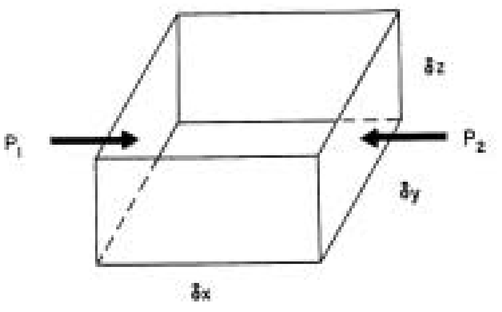
回転座標系から見た加速度　　コリオリの力　　遠心力

・力をどう扱うか(p14L3-p14L14)

外力と内力にわける
→考える気塊は微分で考えるように非常に小さいが，
分子一個一個の運動ではなくその巨視的な量（気圧，気温など）
が支配的になるくらい大きい
→気圧や重力による力を外力
分子運動による摩擦損失等を内力と呼ぶ

- 2.3.1**外力**(p14L15-p16L8)
- **気圧傾度力**(p14L15-p15L14)
  - **一次元で考えると**

$$f_{PGF_x} = -\frac{(P_2 - P_1)A}{M} \quad \text{(2-31)}$$



$$P_2 = P_1 + \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_1 \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_1 (\delta x)^2 + o\left((\delta x)^3\right)$$

Taylor展開

$$A = \delta y \delta z \qquad M = \rho V = \rho \delta x \delta y \delta z$$

$$f_{PGF_x} = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_1 + o(\delta x)$$

$$\delta x \to 0 \Rightarrow \ o(\delta x) \to 0$$

$$f_{PGF_x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

- **三次元でも同様にして**

$$\overrightarrow{f_{PGF}} = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right] = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

- **重力**(p15L15-p16L8)

万有引力$\vec{G}$ **から**(2-30)**における遠心力を差し引いたものを重力として考える**

$$-g\vec{k} = \vec{G} - \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{R}\right)$$

$\vec{k}$**は回転座標系の鉛直方向の基底ベクトル**
通常右辺のベクトルの方向と一致するようにとる

g**は高度や場所によって異なるが，メソスケールの現象では一定値**（g=9.80665m/s^2）**としてよい**

- **気圧傾度力と重力以外の外力は対流圏内のメソスケールの現象では無視して差し支えない**

- 2.3.2 **内力**(p16L9-p16L16)

分子運動による摩擦損失は粘性及びそれに伴う運動量場の変化と呼ばれるが，
メソスケールの大気現象では風速が十分大きいため、粘性の効果は無視できる
→Chap.3**で定量的に評価する**

- **運動量の保存式**(p16L9-p16L16)

$$d\vec{V}/dt = -(1/\rho)\nabla p - g\vec{k} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} \quad \text{(2-32)}$$

ラグランジュ形式

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \underbrace{\boxed{-\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}}}_{\text{移流項}}\ \underbrace{\boxed{-(1/\rho)\nabla p}}_{\text{気圧傾度力}}\ \underbrace{\boxed{-g\vec{k}}}_{\text{重力}}\ \underbrace{\boxed{-2\vec{\Omega}\times\vec{V}}}_{\text{コリオリ力}} \quad \text{(2-33)}$$

オイラー形式

2.4 水の保存式

水は大気中で固相，液相，気相をとるので，水の保存式を考える際には，
大気中の移動と同様に相変化を考える必要がある

$$dq_n/dt = S_{q_n}, n=1,2,3 \quad \text{(2-34)}$$

ラグランジュ形式：同一気塊を追跡すると
相変化等がない限り水は消えてなくなったり現れたりしない

$$\partial q_n/\partial t = -\vec{V}\cdot\nabla q_n + S_{q_n}, n=1,2,3 \quad \text{(2-35)}$$

オイラー形式

q_1, q_2, q_3 は同一体積中の空気の質量に対する氷，水，水蒸気の質量の比を表す

- 生成・消滅項S_{q_n} は水の相変化と化学反応による水の生成・消滅が含まれるが，
  メソスケールでは化学反応は通常無視される
- 生成・消滅項の定式化は非常に複雑である→Chap.9で説明する

- 例えば積雲モデルではエアロゾルへの水の凝結とその後の降水粒子への成長が
  雲粒を粒径分布によっていくつかに分類して表現される
  また，氷晶の併合もさらに複雑な相互作用である
- 簡単なモデルとしては，相対湿度が100%になったら雨あるいは雪として落下させて，
  未飽和の空気を通過すれば蒸発するという表現方法もある
  （液相や固相の相対湿度は気温と利用可能な氷晶核の割合から決まる）

2.5 その他の気体とエアロゾルの保存式

$$d\chi_m/dt = S_{\chi_m}, m=1,2,3,\ldots,M \quad \text{(2-36)}$$

ラグランジュ形式：同一気塊を追跡すると
化学変化等がない限り物質は消えてなくなったり現れたりしない

$$\partial\chi_m/\partial t = -\vec{V}\cdot\nabla\chi_m + S_{\chi_m}, m=1,2,3,\ldots,M \quad \text{(2-37)}$$

オイラー形式

χ_m は同一体積中の空気の質量に対する水以外の物質の質量の比を表す

- 二酸化炭素，メタン，二酸化硫黄，硫酸化合物，硝酸化合物，オゾン，除草剤等
- 生成・消滅項には相変化と化学変化が含まれるが，定式化は非常に複雑である
- 健康や経済に対する大気汚染の影響評価や，トレーサーとして用いて気候システムの
  研究をする際にメソモデルに組み込まれる

2.6 まとめ

テンソル形式で表した基礎方程式系

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial\rho u_j}{\partial x_j} \quad \text{(2-43)}$$

質量の保存式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -u_j\frac{\partial\theta}{\partial x_j} + S_\theta \quad \text{(2-44)}$$

熱の保存式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - g\delta_{i3} - 2\in_{ijk}\Omega_j u_k$$

(2-45) 運動量の保存式

$$\frac{\partial q_n}{\partial t} = -u_j\frac{\partial q_n}{\partial x_j} + S_{q_n}, n=1,2,3$$

(2-46) 水の保存式

$$\frac{\partial\chi_m}{\partial t} = -u_j\frac{\partial\chi_m}{\partial x_j} + S_{\chi_m}, m=1,2,\ldots,M$$

(2-47) その他の物質の保存式

$$\theta = T_v\left(1000/p(hPa)\right)^{R_d/C_p}$$

(2-48) （仮）温位の定義式

$$p = \rho R_d T_v \quad \text{(2-49)}$$

理想気体の状態方程式

$$T_v = T\left(1+0.61q_3\right) \quad \text{(2-50)}$$

仮温度の定義式

11+M本の式と11+M個の従属変数
tとx,y,zが独立変数
→これらの式の単純化と解法を
　この本ではこれからあつかっていく

メソモデルやその結果を使って研究する場合，
対象とするシミュレーションに使う（これらの方程式系を近似した）方程式系の
適用範囲を考える必要がある