確率的状態選択法とNクイーン問題

T02KF034　手塚章浩

１．研究の概要

問題に対して最適な解を探索する手法として遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithm)がある．数学的保証を持った遺伝的アルゴリズムである確率的状態選択法の特性を利用して N クイーン問題の全種類の解を求める．

２．遺伝的アルゴリズム（GA）

生物の進化の仕組みを模した方法で広大な解空間から最適解を探索する手法を GA という．問題に対する解候補を遺伝子としてビット列などで表現し,個体とする.その集団を用意し世代として,選択，交叉，突然変異などの操作で次の世代を生成する．世代交代を繰り返すうちに各個体が最適解に向かうことが期待できる．

GA で最適解を目指して世代交代を繰り返しているうちに最適解ではない値に収束してしまい進化が止まってしまうことがある．このときの解を局所解という．つまり GA の実行中に個体が収束してもそれが最適である保証はない．そこで焼きなまし法で用いられているような確率で状態を遷移させる方法を GA に適用させ，局所解に留まらない最適値到達の保証を GA に付加する方法を説明する．

３．焼きなまし法

焼きなましとは，金属を高温にした後、不純物を除くために温度をコントロールしてゆっくりと冷やしていく金属加工の技術である．

焼きなまし法を用いた GA とは，適合度だけでなく温度パラメータ T を使用し，状態遷移確率をコントロールする手法である．

状態遷移の確率 $P_{i\to j}, P_{j\to i}$ をある２つの状態 i と j の間で適合度が $f_i < f_j$ のとき式(1)と決める．

$$
(1)\quad
\begin{cases}
P_{i\to j} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{f_i - f_j}{T}}} \\[2ex]
P_{j\to i} = \dfrac{1}{1+e^{\frac{f_j - f_i}{T}}}
\end{cases}
$$

式(1)は確率的に改悪の方へも遷移する可能性があり局所最適解から抜け出す役割を果たす．

温度パラメータ T が高ければ状態が改悪に遷移する可能性が高まり，低くすれば改悪の方へは遷移しにくくなる．

この状態遷移確率で状態遷移を繰り返すと平衡状態に達する．平衡状態では詳細つり合いの原理より式(2)となる．

$$
(2)\quad F_i = Ce^{\frac{f_i}{T}} \text{ (C は定数)}
$$

式(2)はボルツマン分布を表している．ボルツマン分布において温度パラメータ T が高い場合は,分布は一様に出現するが，温度パラメータ T を 0 に近づけた場合は，状態が出現する分布は適合度の高い方に集まる．この分布に従っていることが最適解の保証となる．

焼きなまし法を用いるために通常の GA の交叉,突然変異の方法に変えなければならない所がある．

交叉は通常の GA では２つの親から子が作られるが，焼きなまし法では１つの状態から次の状態に移らなければならないので，２つの親を繋げるなどの工夫をして交叉を行う．さらに全ての交叉点で交叉を行う．

また，通常の GA では突然変異を多用しないが焼きなまし法では交叉させた後に各ビットを突然変異させる．全ての交叉点での交叉と，各ビットの突然変異は個体数を増やし多くの状態への遷移確率を計算するために行われる．

４．確率的状態選択法

焼きなまし法を使ったボルツマン分布をみたす GA は数学的保証を持つが，総状態数が膨大になると実際の計算は困難になる．確率的状態選択法とは，ボルツマン分布に従う保証を持つ選択方法を用いて,総状態数の一部を計算する手法である．

ボルツマン分布に従う選択をするために確率関数 On-Off Probability function を利用する.この確率関数は式(3)で表せる．

$$
(3)\quad P_i(\eta_i) = \frac{1}{a_i}\delta(\eta_i - a_i) + \left(1-\frac{1}{a_i}\right)\delta(\eta_i)
$$

また，式(３)中の η は式(４)で決められる．

$$(4)\ \eta_i = \begin{cases} a_i & \cdots P_{\eta_i=a_i} = \dfrac{1}{a_i} \\ 0 & \cdots P_{\eta_i=0} = 1-\dfrac{1}{a_i} \end{cases} \quad ,\left(a_i = \min(1, \frac{f_i}{\varepsilon})\right)$$

式(4)よりη_iは$1/a_i$でa_iをとり，$1-(1/a_i)$で0をとる．a_iは1か(f_i/ε)の小さい方をとる．f_iは状態の適合度を表し，εはパラメータでこの値によって生き残る状態数をおおよそ決めることができる．ηをかけることで生き残るかどうかが決まる．この選択で生き残った状態が$\varepsilon < f_i$ならばそのままの値で残り，$\varepsilon > f_i$ならば$f_i = \varepsilon$となる．このようにして選択を行う．実際の計算では有限数のサンプルを求め，平均を計算する．

5．N クイーン問題

N×N のチェス盤上に縦，横，斜めのどの方向にもぶつからないよう N 個のクイーンを配置するという問題である．全種類の解を見つけることは非常に難しい．

確率的状態選択法は一つの個体から多くの子を作り出し，多くの状態を同時に処理していくという特性を持つ．N クイーン問題の状態を遺伝子で表現し，特性を利用して全種類の解を求める．

6．確率的状態選択法を用いた GA の N クイーン問題への適用

同じ列にあるクイーンの組み合わせの数を適合度とする．つまり通常の GA とは逆に最適解は適合度が0となる個体である．例として，８×８の N クイーン問題における解の１つの遺伝子での表現を図１に示す．

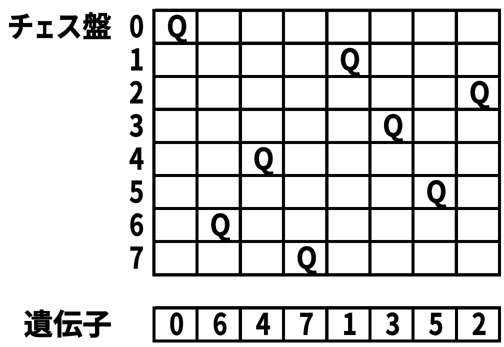

図１　盤上のクイーン配置の遺伝子表現例

図１のように N 個の大きさの箱を用意しその中に上から何番目にあるかを整数で入れることでチェス盤の状態を表現する．

遺伝子の操作はその個体の中での入れ替えのみである．初期配置で縦と横にクイーンがぶつからないように配置すると個体内での遺伝子の入れ替えによって縦と横ではクイーンがぶつかることがなく，適合度は斜めの組み合わせのみを計算すれば良い．

7．実験と考察

確率的状態選択法を用いて N クイーン問題の全種類の解を求める．今回は，N を８と設定した８クイーン問題を解く．８クイーン問題は 92 種類の解が存在する．クイーンの初期配置は対角に斜めに１直線に並べた状態とする．確率的状態選択法におけるパラメータεを 0.015 に固定し，１回の試行の世代交代を 150 回とする．温度パラメータＴを変化させて，各温度パラメータＴで試行を 25 回行い，各試行において出現した解の種類数を図２に示す．

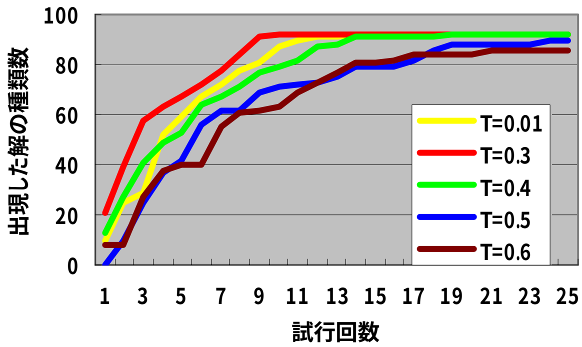

図２　各温度パラメータでの出現した解の種類数

図２より，T により解の出現に差が出ていることがわかる．Ｔは極端に低くても全種類の解を見つけることができる．しかしＴが 0.5 より大きくなると全種類の解が出現しにくい．

8．おわりに

GA を N クイーン問題に適用することで，８クイーン問題の全種類の解を求めることができた．今後の課題として，８×８以上の N クイーン問題についても全種類の解を求めることができるのか，試す必要がある．

参考文献

[1]平早哲明：遺伝的アルゴリズムにおける新しい遷移法山梨大学工学部コンピュータ・メディア工学科卒業論文(2004)

[2]点と線の部屋：第１部第４１章 N クイーン問題の探求(online)
＜http://www32.ocn.ne.jp/~graph_puzzle/1no41.htm＞(2006-02-18)