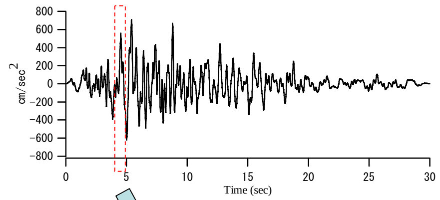
防災工学概論

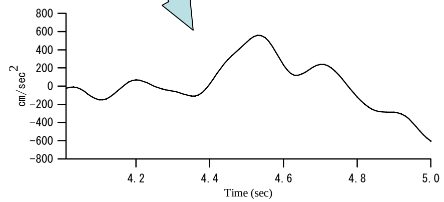
第5回　地震工学の基礎②
フーリエスペクトル

鈴木　猛康

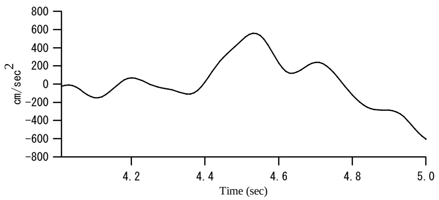
地震観測データ，入力地震動



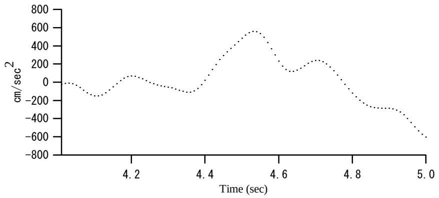
4～5 (sec) の
区間を拡大



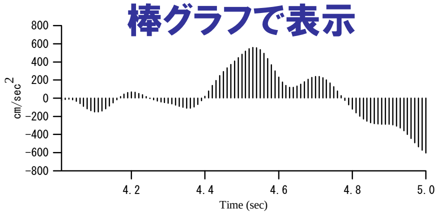
地震観測データ，入力地震動とは



ドットで表示

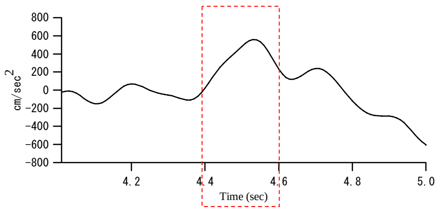


棒グラフで表示

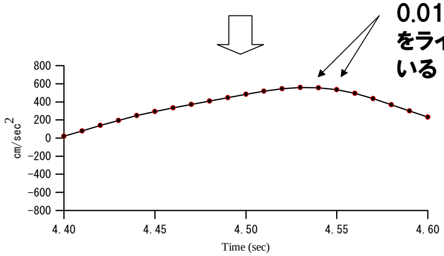


実は0.01秒毎の加速度の数値
であり，連続していない

我々が取り扱う地震波の実際



0.01秒毎の加速度データ
をラインで結んで表示して
いる



フーリエスペクトル
（Fourier Spectrum）

●もとの地震波がどんな振動数成分を含んでおり，どんな成分の振幅が大きいかを示すもので，その地震波が表層地盤や構造物に与える影響を推察できる
●地震波にとくに大きな振幅の振動数成分があるとき，その成分が卓越しているといい，そのような成分波の振動数あるいは周期を，
卓越振動数(Predominant Frequency)**あるいは**
卓越周期(Predominant Period)**という．**

地震波データの時間関数表示

データサンプリング間隔をΔt，データ数をNとすると，地震波の継続時間Tは

T=NΔt

である．また，m番目のデータをx_mとする．m番目のデータのサンプリング時刻tは

t=mΔt

となる．したがって，データの時間関数をx (t) で表すことにすると

X_m=x (mΔt)

である．

通常，地震観測ではΔt＝0.01秒の時間間隔で加速度がサンプリングされる．

三角級数によるデータ表示

N個のデータx_mを全部通るような関数を三角関数(調和関数）を使って求める．

$A_o, A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$

$B_o, B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots$

を定数としたとき三角級数を次のように表す．

$$A_0 + A_1 \cos t + A_2 \cos 2t + \cdots + A_k \cos kt + \cdots$$

$$B_0 + B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + \cdots + B_k \sin kt + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos kt + B_k \sin kt \right)$$

$t \rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{2\pi}{N\Delta t} t$ と置くと，

$$x_m = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2\pi k}{N\Delta t} t + B_k \sin \frac{2\pi k}{N\Delta t} t \right)$$

$t = m\Delta t$ と置き，N/2までで打ち切ると有限三角級数となる．

$$x_m = \sum_{k=0}^{N/2} \left(A_k \cos \frac{2\pi km}{N} + B_k \sin \frac{2\pi km}{N} \right)$$

$$B_0 \sin \frac{2\pi km}{N} = 0, B_{N/2} \sin \frac{2\pi (N/2) m}{N} = B_{N/2} \sin(\pi m) = 0$$

$$A_0 \cos \frac{2\pi km}{N} = A_0$$

$$x_m = \tilde{x}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1}\left(A_k \cos\frac{2\pi km}{N} + B_k \sin\frac{2\pi km}{N}\right) + A_{N/2}\cos\frac{2\pi(N/2)m}{N}$$

$$A_0 \to \frac{A_0}{2}, A_{N/2} \to \frac{A_{N/2}}{2}$$

$$x_m = \tilde{x}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1}\left(A_k \cos\frac{2\pi km}{N} + B_k \sin\frac{2\pi km}{N}\right) + \frac{A_{N/2}}{2}\cos\frac{2\pi(N/2)m}{N}$$

多元連立方程式を解くと，N個の係数を以下のように得ることができる．

$$A_k = \frac{2}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \cos\frac{2\pi km}{N} \qquad (k=0,1,2,\cdots,N/2-1,N/2)$$

$$B_k = \frac{2}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \sin\frac{2\pi km}{N} \qquad (k=1,2,\cdots,N/2-1)$$

フーリエ変換

$$f_k = \frac{k}{N\Delta t} = \frac{k}{T}$$

$$\tilde{x}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1}\left(A_k \cos 2\pi f_k t + B_k \sin 2\pi f_k t\right) + A_{N/2}\cos 2\pi f_{N/2} t$$

重ね合わせの原理を用いて，

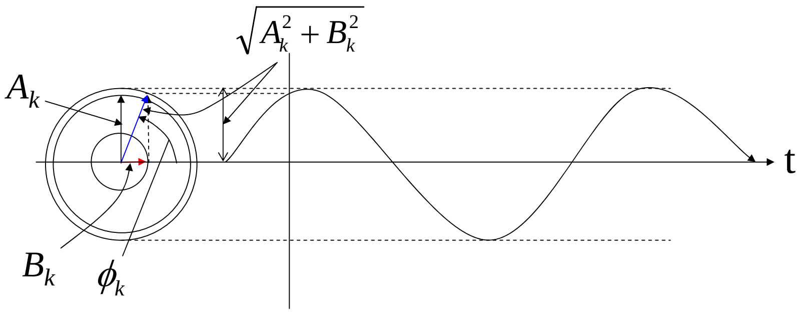
$$\tilde{x}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1}\left(X_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)\right) + X_{N/2}\cos 2\pi f_{N/2} t$$

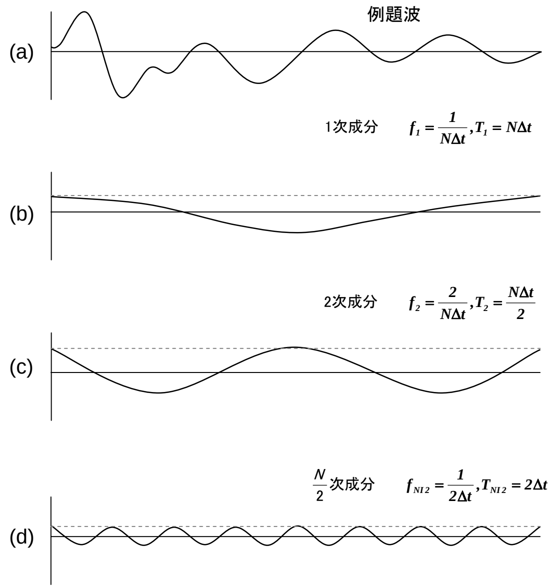
$$X_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(-\frac{B_k}{A_k}\right) \qquad (-\pi < \pi)$$

もとの不規則波x(t)はN/2種類のcos波に分解され，各波は振幅X_kと位相角ϕ_kを有する．これをフーリエ変換という．ここでX_kはk次成分の振幅，ϕ_kはk次成分の位相角である．

k次成分波の振幅と位相





フーリエスペクトル

有限フーリエ係数 から求まる各成分波の振幅に地震波の継続時間T_Dの1/2を乗じたもの(フーリエ振幅と呼ぶ)を縦軸に，各成分波の周期あるいは振動数(周波数)を横軸に描いたものを，フーリエスペクトルと呼ぶ．

フーリエスペクトルは，どの振動数成分が卓越した地震波であるかを知るための重要な指標として使われている．

k次の調和振動と振動数

- 周期(Period) : T_k
- 振動数(Frequency)　$f_k = \dfrac{1}{T_k}$
- 基本振動数(Fundamental Frequency)

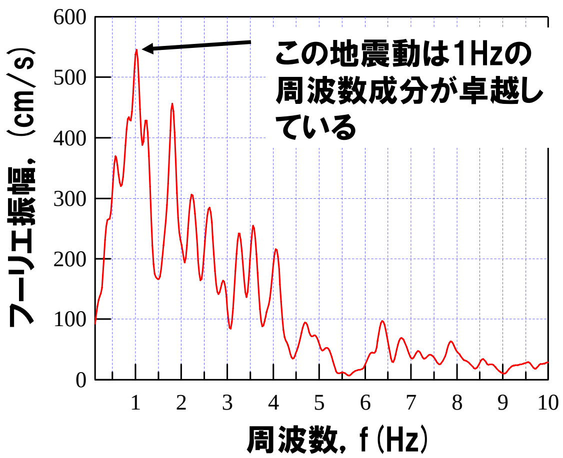
$$f_1 = \frac{1}{N\Delta t}$$

- ナイキスト振動数(Nyquist Frequency)

$$f_{N/2} = \frac{N/2}{N\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}$$

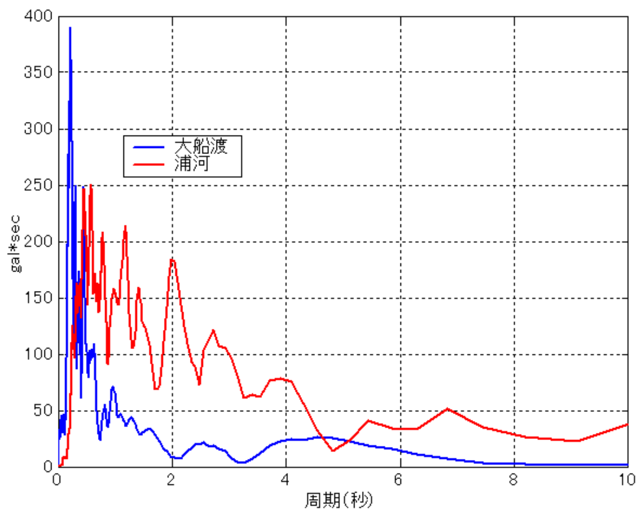
→振動数の分解能を意味する.

フーリエスペクトルの例



f (Hz) =1/T

フーリエスペクトルの例



本日の講義のまとめ

- 地震波にどのような振動数成分が卓越するかを知ることは，表層地盤や構造物の揺れ方（振動特性）を把握するには極めて重要．
  →フーリエスペクトルを用いて卓越振動数を知る
- 地震波は一般的に0.005秒～0.02秒毎の加速度の数値として取り扱う
- 地震波を調和振動の重ね合わせと仮定