山梨大学　防災工学講座
鈴木　猛康

防災工学概論　第６回

応答スペクトルの計算方法

１．　Tailor 展開と台形加速度法

一般に時間の関数 $f(t)$ を Tailor を展開すれば，　$f^{(\kappa)}(t)$ を k 次の微分係数としたとき

$$f(t+\Delta t)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(\Delta t)^{\kappa}}{\kappa!}f^{(\kappa)}(t) \tag{1.1}$$

と表わされるから，　$\dot{y}_{t+\Delta t}$　および $y_{t+\Delta t}$ を Tailor 展開すれば

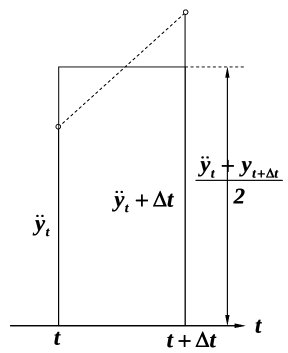
$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{t+\Delta t}&=\dot{y}_t+(\Delta t)\ddot{y}_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\dddot{y}_t+\cdots\cdots\\ y_{t+\Delta t}&=y_t+(\Delta t)\dot{y}_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\ddot{y}_t+\frac{1}{6}(\Delta t)^3\dddot{y}_t+\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

となる。時刻 $\boldsymbol{t}$ および $\boldsymbol{t+\Delta t}$ 間の加速度は一定であって，図のように加速度の変化はないものと仮定する．

このような仮定を置くことを，台形加速度法と呼ぶ．

$$\ddot{y}_t=\frac{\ddot{y}_t+\ddot{y}_{t+\Delta t}}{2},\dddot{y}_t=0 \tag{1.3}$$

台形加速度法の仮定によれば，4 次以上の微分係数もまたすべて 0 となる。そこでこれらの関係を式(1.2)に代入すれば



図－1.1　台形加速度法

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_{t+\Delta t}&=\dot{y}_t+(\Delta t)\frac{\ddot{y}_t+\ddot{y}_{t+\Delta t}}{2}\\ y_{t+\Delta t}&=y_t+(\Delta t)\dot{y}_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\frac{\ddot{y}_t+\ddot{y}_{t+\Delta t}}{2}\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

を得る。

２．質点系の応答

　地動加速度を受ける１質点系の応答は，質点の地表に対する相対変位を $x(t)$，系の質量を m，減衰係数を c，ばね定数を k とし，地動加速度を $\ddot{y}(t)$ としたとき，(2.1)式となる．

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{y} \tag{2.1}$$

(2.1)式の両辺を m で除すと．

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=-\ddot{y} \tag{2.2}$$

第２項を変形して，

$$\ddot{x}+\frac{c}{\sqrt{mk}}\sqrt{\frac{k}{m}}\dot{x}+\frac{k}{m}x=-\ddot{y} \tag{2.3}$$

ここで，ωを円振動数，c_cを臨界減衰値とすると，

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}, c_c=2\sqrt{mk}$ であるから

$$\ddot{x}+2\frac{c}{c_c}\omega\dot{x}+\omega^2 x=-\ddot{y} \tag{2.4}$$

減衰定数 h の定義は，$h=\dfrac{c}{c_c}$ であるから，最終的に 1 質点系の運動方程式は，非同次定係数線形 2 階常微分方程式の解として求まる。

$$\ddot{x}+2h\omega\dot{x}+\omega^2 x=-\ddot{y} \tag{2.5}$$

この式は

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}+2h\omega\dot{x}_{t+\Delta t}+\omega^2 x_{t+\Delta t}=-\ddot{y}_{t+\Delta t} \tag{2.6}$$

と書くことができる。台形加速度法によれば，速度・変位に関しては式(1.2)と同一の関係、すなわち

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_{t+\Delta t}&=\dot{x}_t+(\Delta t)\frac{\ddot{x}_t+\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}\\ x_{t+\Delta t}&=x_t+(\Delta t)\dot{x}_t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\frac{\ddot{x}_t+\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

が成り立つから，これを式(2.6)に代入して以下のように整理する．

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-2h\omega\dot{x}_{t+\Delta t}-\omega^2 x_{t+\Delta t}$$

$$=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-2h\omega\left(x_t+\frac{(\Delta t)\ddot{x}_t}{2}+\frac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_{t+\Delta t}\right)-\omega^2\left\{x_t+(\Delta t)\dot{x}_t+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\ddot{x}_t}{2}+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}\right\}$$

$$=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-2h\omega\left(\dot{x}_t+\frac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_t\right)-\omega^2\left\{x_t+(\Delta t)\dot{x}_t+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\ddot{x}_t}{2}\right\}-2h\omega\frac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_{t+\Delta t}-\omega^2\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}$$

$$=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-2h\omega\left(\dot{x}_t+\frac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_t\right)-\omega^2\left\{x_t+\frac{(\Delta t)}{2}\dot{x}_t+\frac{(\Delta t)}{2}\dot{x}_t+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\ddot{x}_t}{2}\right\}-2h\omega\frac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_{t+\Delta t}-\omega^2\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}$$

$$=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-2h\omega\left(\dot{x}_t+\frac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_t\right)-\omega^2\left\{x_t+\frac{(\Delta t)}{2}\left(\dot{x}_t+\dot{x}_t+\frac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_t\right)\right\}-2h\omega\frac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_{t+\Delta t}-\omega^2\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}$$

(2.8)

$E_t=\dot{x}_t+\dfrac{(\Delta t)}{2}\ddot{x}_t, F_t=x_t+\dfrac{(\Delta t)}{2}(\dot{x}_t+E_t)$ と置くと，

$$\left\{1+2h\omega\left(\frac{\Delta t}{2}\right)+\omega^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right\}\ddot{x}_{t+\Delta t}=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-2h\omega E_t-\omega^2 F_t \tag{2.9}$$

さらに，

$$R = 1 + 2h\omega\left(\frac{\Delta t}{2}\right) + \omega^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2$$ と置くと，

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = -\left(\ddot{y}_{t+\Delta t} + 2h\omega E_t + \omega^2 F_t\right)/R \qquad (2.10)$$

を得る。R は時間の経過とは関係なく定まる量，E_t および F_t は時刻 t において定まる量だから，$E_t = F_t = 0$ より始めて式(2.8)により，質点の応答を逐時求めていくことができる。

３．応答スペクトルの算定

減衰定数 h と円振動数ωを固定すると，上記の計算によって $\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t)$ によって質点の地震応答の時刻歴が計算できる．一般的には，減衰定数は 0.05 から 0.25 程度まで 0.05 刻みで，円振動数は周期で 0.05 秒～10 秒程度まで計算される．なお

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ あるいは，$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

である．

各減衰定数 h と円振動数ωの組合せで計算した $\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t)$ について，応答の絶対値の最大値を，それぞれ $S_A(T,h)$，$S_V(T,h)$，$S_D(T,h)$を，横軸に周期あるいは振動数，縦軸に S_A，S_V，S_D をプロットし，減衰定数 h 毎に点をつないだ折れ線グラフを応答スペクトルと言う．