

オートマトンと言語

2回目 4月18日(水)

2章(数式の記法, スタック, BNF記法)

授業資料

<http://ir.cs.yamanashi.ac.jp/~ysuzuki/public/automaton/>

授業の予定(中間試験まで)

回数	月日	内容
1	4月11日	オートマトンとは, オリエンテーション
2	4月18日	2章(数式の記法, スタック, BNF)
3	4月25日	2章(BNF), 3章(グラフ)
4	5月02日	3章(グラフ)
5	5月09日	4章 有限オートマトン1
6	5月16日	有限オートマトン2 2・3章の小テスト
7	5月23日	正規表現
8	5月30日	正規表現, 非決定性有限オートマトン
9	6月06日	中間試験, 前半のまとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります.

授業の予定

回数	月日	内容
10	6月13日	NFA→DFA
11	6月20日	DFAの最小化
12	6月27日	DFAの最小化, 有限オートマトンの応用
13	7月04日	プッシュダウンオートマトン, チューリング機械
14	7月11日	形式言語理論, 文脈自由文法
15	7月18日	期末試験, まとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります.



前回の復習

- この授業の目標
- 複雑(そう)なシステムの中身を考える
 - 手品を後ろから見る
 - コンピュータの中身を見る
 - 人間の頭の中を見る



今日のメニュー

- 数学的帰納法, 再帰 p.18~
- 数式の記法
- 後置記法とスタック
- BNF記法



数学的帰納法の例

任意の自然数 n について命題 P_n を考える

a) 基本段階: P_1 は真である

b) 帰納段階:

P_k が真と仮定すれば (帰納法の仮定)

P_{k+1} も真である

c) 結論: a), b) が成立すれば, 任意の自然数 n に対して P_n は真である

例題2.5

$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$ を数学的帰納法で示せ

$P_n = [\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)]$ とする.

P_n は, n に対し $[\]$ 内の等式が成立することを意味する命題である.

$P_n = T$ (true)ならば等式が成立し, $P_n = F$ (false)ならば等式は成立しない.

(基本段階) $n=1$ のとき, P_1 において左辺 = $\sum_{i=1}^1 i = 1$, 右辺 = $\frac{1}{2}1(1+1) = 1$,

よって, $P_1 = T$

(帰納段階) $n=k$ のとき, $P_n = [\sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2}k(k+1)] = T$ とする(帰納法の仮定).

$n=k+1$ のとき, P_{k+1} において

$$\text{左辺} = \sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^k i + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2),$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2),$$

よって, $P_{k+1} = T$

(結論) 以上により, 任意の自然数 n に対して $P_n = T$ である.



演習問題1 例題2.7

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $n^3 + 5n$ は 6 で割り切れることを,
 n に関する帰納法で証明せよ



演習問題1の解答 例題2.7

$n = 1$ の時 $n^3 + 5n = 6$ であるから6で割り切れる

$n = k$ の時 $n^3 + 5n = k^3 + 5k$ が6で割り切れるとする

$n = k + 1$ の時 $n^3 + 5n = (k + 1)^3 + 5(k + 1) = (k^3 + 5k) + 3(k(k + 1) + 2)$

$(k^3 + 5k)$ は仮定より6で割り切れる

$k(k + 1)$ は2で割り切れるので $(k(k + 1) + 2)$ も2で割り切れる

したがって $3(k(k + 1) + 2)$ は6で割り切れる

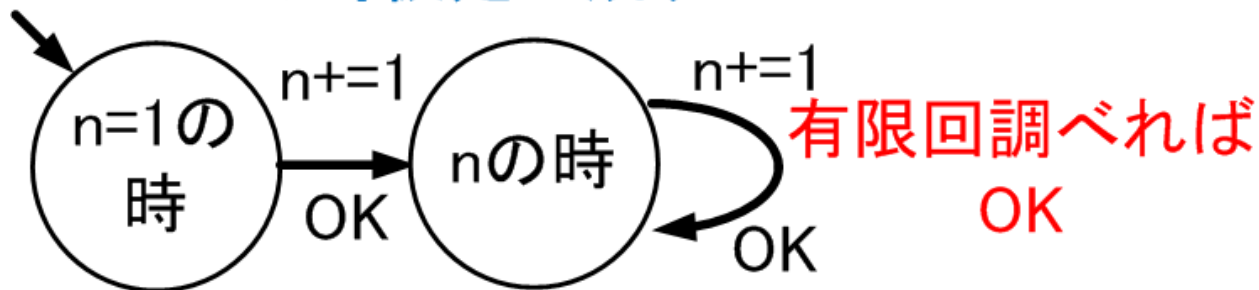
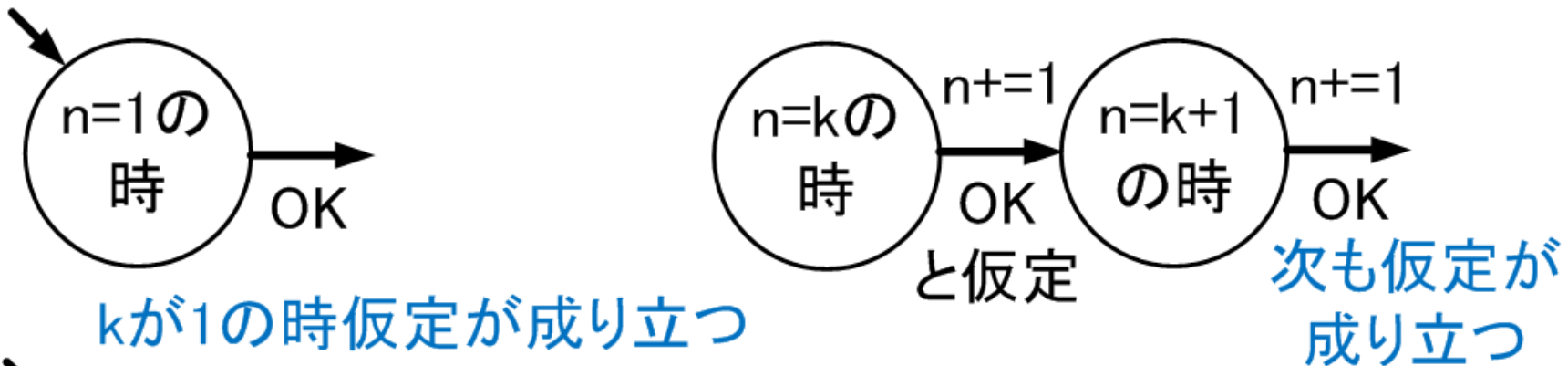
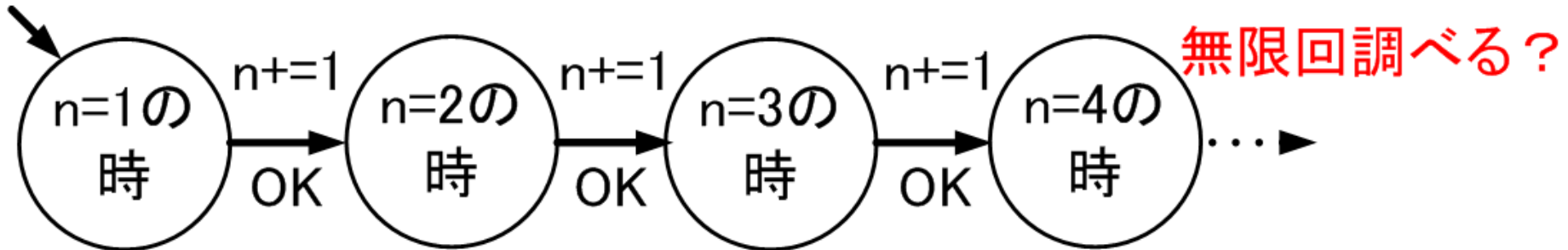
2項とも6で割り切れるので $(k^3 + 5k) + 3(k(k + 1) + 2)$ は6で割り切れる

したがって $n^3 + 5n = (k + 1)^3 + 5(k + 1)$ は6で割り切れる

以上により、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $n^3 + 5n$ は6で割り切れる

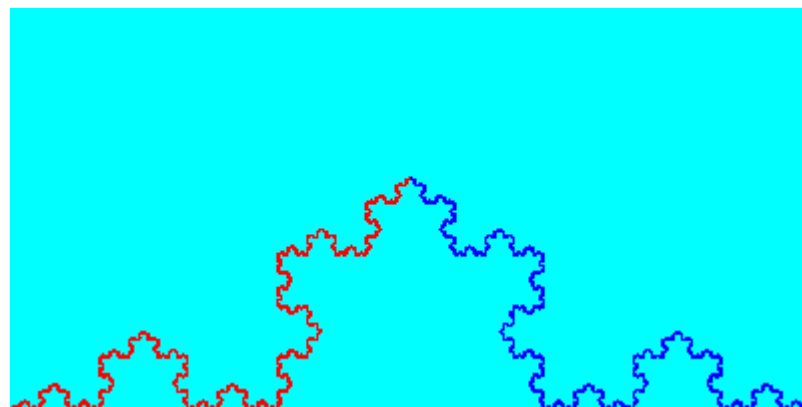
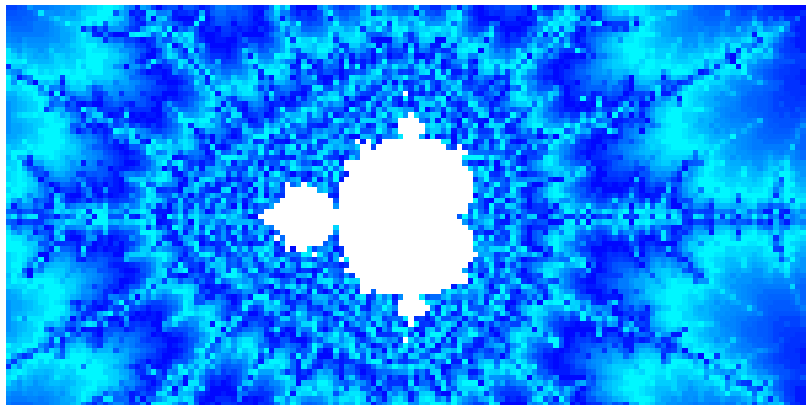
例題2.7を状態遷移で表す

$\forall n \in \mathbb{N}$ で $n^3 + 5n$ が6で割り切れる？



再帰的構造

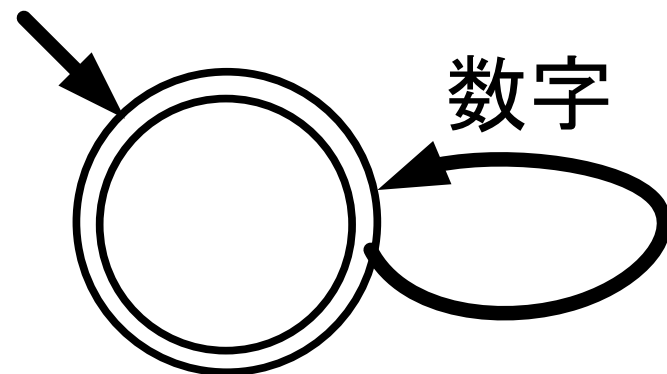
- ある構造の一部が全体と同じような構造をしているもの
- 例
 - 再帰的アルゴリズム
 - フラクタル



再帰的記述

非負の整数を表す10進記法の数値

- $\langle \text{数値} \rangle ::= 0 \mid \langle \text{正整数} \rangle$
- $\langle \text{正整数} \rangle ::= \langle \text{非零数字} \rangle \langle \text{数字繰り返し} \rangle$
- $\langle \text{非零数字} \rangle ::= 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$
- $\langle \text{数字繰返し} \rangle ::= \varepsilon \mid \langle \text{数字} \rangle \langle \text{数字繰返し} \rangle$
- $\langle \text{数字} \rangle ::= 0 \mid \langle \text{非零数字} \rangle$



数字の繰り返し

宿題

- 例題2.26の解を参考にして, ユークリッドの互除法(最大公約数)のプログラムを作成せよ
 - 使用するプログラム言語は問わない

$GCD(x, y)$:

a : $x = y$ のとき $GCD := x$;

b : $x > y$ のとき $call\ GCD(y, x)$;

c : $y < x$ のとき

$r := y \bmod x$;

$r = 0$ のとき $GCD := x$;

$r \neq 0$ のとき $call\ GCD(r, x)$



形式言語

- 基となる記号の幾つかから、定められた規則に従って作られる記号全体の集合
- **プログラミング言語**も素記号と構文規則によって定められた形式言語

- 用語
 - **アルファベット**: 有限個の文字記号の集合
 - **語**: 有限な長さの文字記号列
 - **言語**: アルファベットの閉包の部分集合



言語の演算

言語の和

$$L_1 + L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\} = L_1 \cup L_2$$

(集合としての和)

言語の積

$$L_1 L_2 = \{wv \mid w \in L_1 \wedge v \in L_2\}$$

(接続語の集合)

言語の閉包

- L に属する任意個の記号列を任意回数, 任意の順序で並べて得られる記号列のすべてからなる無限集合

$$L^* = L^0 + L^1 + L^2 + L^3 + \dots,$$

$$\text{ただし, } L^0 = \{\varepsilon\}, L^1 = L, L^i = L^{i-1} \cdot L$$



数式の記法

■ 前置記法(ポーランド記法)

- 演算子が先頭
- $*xy$

■ 中置記法

- 演算子が真ん中
- $x*y$

■ 後置記法(逆ポーランド記法)

- 演算子が最後
- xy^*

数式の記法(1)

前置記法(ポーランド記法)

- prefix notation (Polish Notation)

- 例: $*xy$

- Lisp言語

- (car '(A B C))

- car : リストの第一要素を取り出す演算子

- (car '(A B C)) \rightarrow A

演算子



- 計算方法: 左から1文字ずつ読み込み, 演算子1つと変数2つがそろったら計算し, 計算した部分を計算結果に置き換える

数式の記法(2)

中置記法

- infix notation
- 例: $x*y$
- 算数, 数学でよく使われる記法
- 式の意味を一意に確定するために括弧が必要な場合がある.
 - $(x+y)*z$

数式の記法(3)

後置記法(逆ポーランド記法)

- postfix notation (Reverse Polish Notation)

- 例: xy^*

- Hewlett-Packardの電卓

- 括弧を書かなくても良い.

- 頭の中で計算する順序に近い

- 計算機の中の計算順序と同じ

- 日本語での計算の説明順序と同じ

- 例: $xy+$



- 計算方法: 左から1文字ずつ読み込み, 演算子を読み込んだら直前の2つの変数を使って計算し, 計算した部分を計算結果に置き換える



後置記法で計算する電卓

- ソフトウェア名 : SK-RPN22
 - <http://www.forest.impress.co.jp/article/2006/07/11/okiniiri.html>
 - <http://www.kaz22.jpn.org/software.html>
 - 計算式 : $3\ 5\ +\ 2\ *$ $(3+5)*2$
 - 入力 : $3\ \text{ENTER}\ 5\ +\ 2\ *$ $\rightarrow\ 16$

例題

- $xy+z^*$ (後置記法)を中置記法に変換
 - $xy+z^* \rightarrow (xy+)z^*$
 - 最初に $xy+$ を計算し, その結果と z を掛け合わせる
 - $(x+y)^*z$ (中置記法)
- $(x+y)^*z$ (中置記法)を後置記法に変換
 - $$\begin{array}{c} (x+y)^*z \\ \underbrace{\quad} \\ \underbrace{\quad}_1 \\ \underbrace{\quad}_2 \end{array}$$
 - $xy+z^*$ (後置記法)
- y/z (中置記法)を後置記法に変換
 - $yz/$ (変数間の順序も重要)



演習問題2

- 中置記法 $(y+z)^*w/v$ を逆ポーランド記法 (後置記法) に変換せよ.
- 中置記法 $(y+z^*w)/v$ を逆ポーランド記法 (後置記法) に変換せよ.



演習問題2の解答

■ 中置記法 $(y+z)^*w/v$

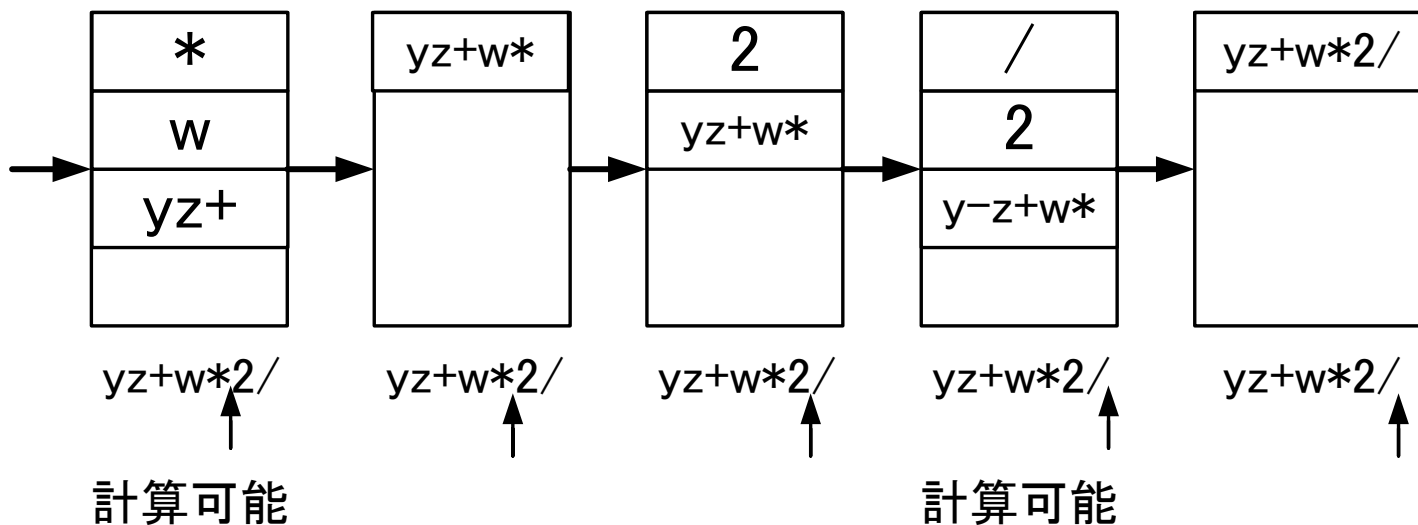
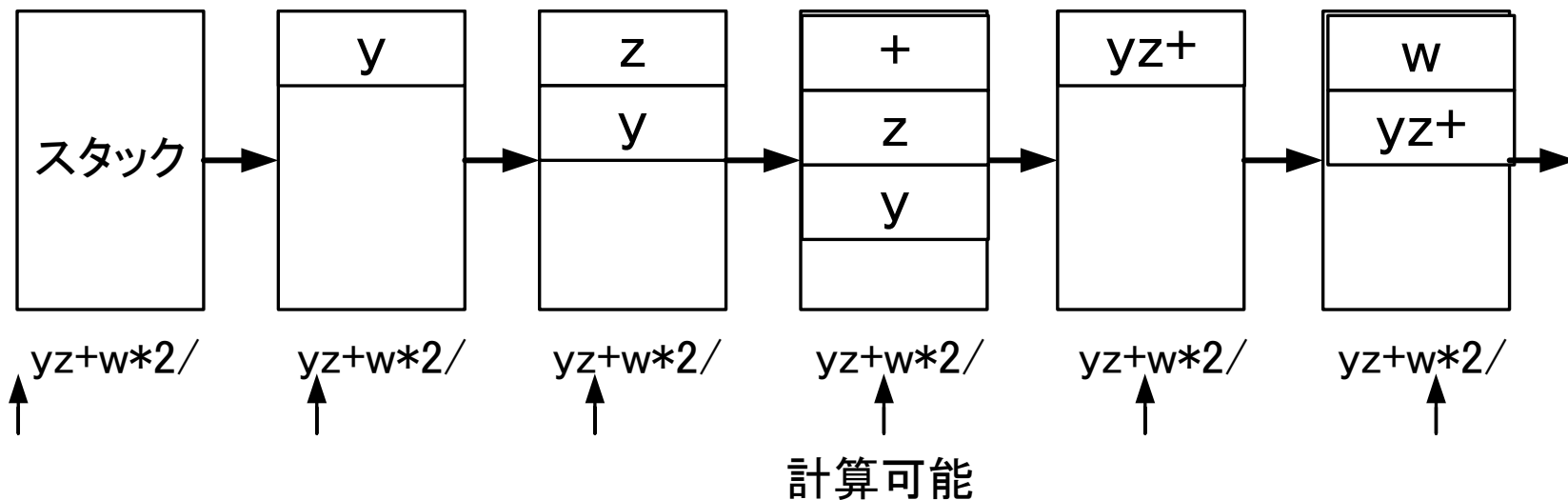
■ 逆ポーランド記法 $yz+w^*v/$

■ 中置記法 $(y+z^*w)/v$

■ 逆ポーランド記法 $yzw^*+v/$

$yz+w*2/$ の計算方法(後置記法)

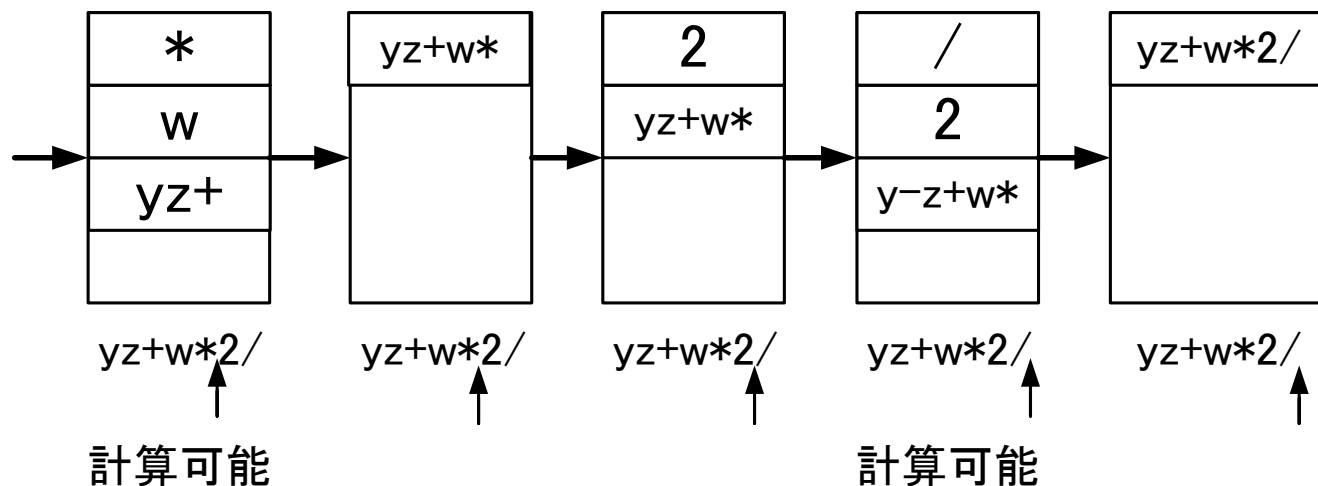
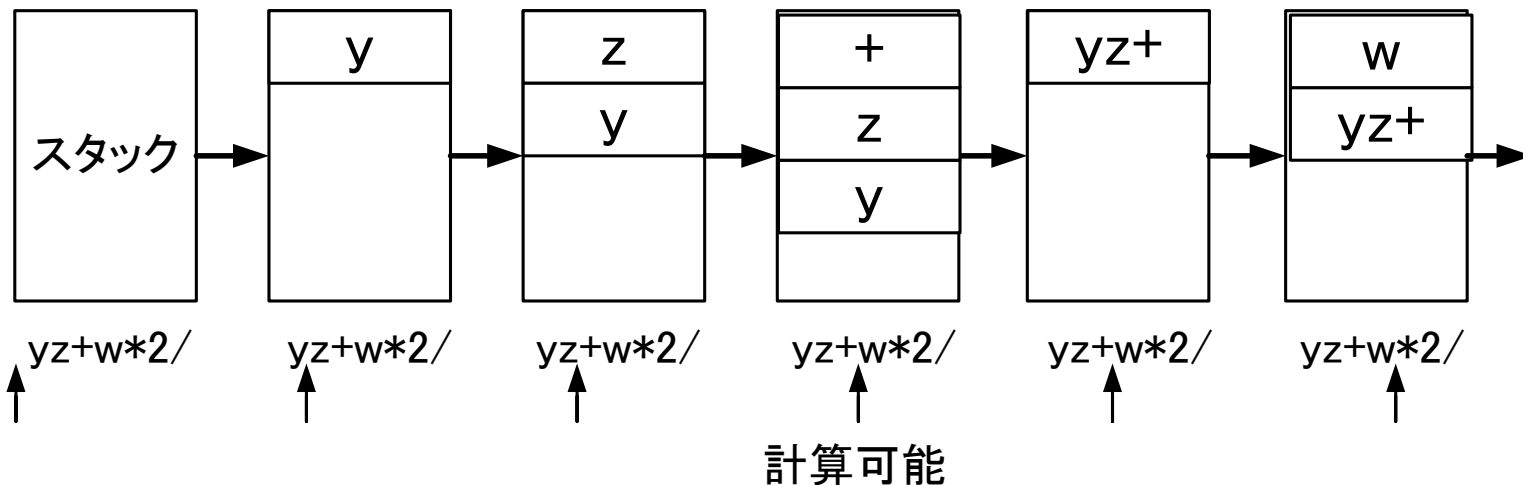
- スタック(Last In First Out)を利用する



演習問題3

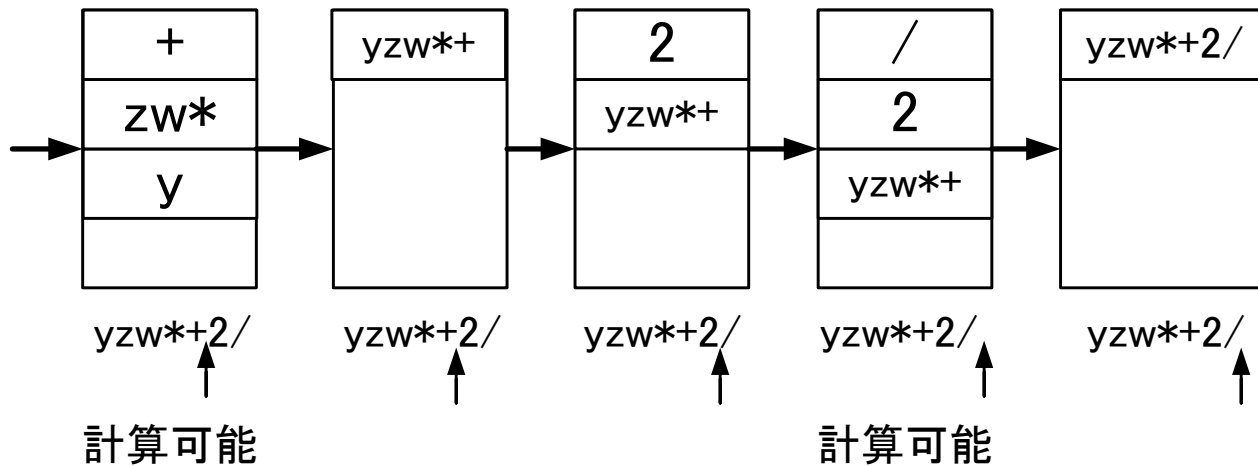
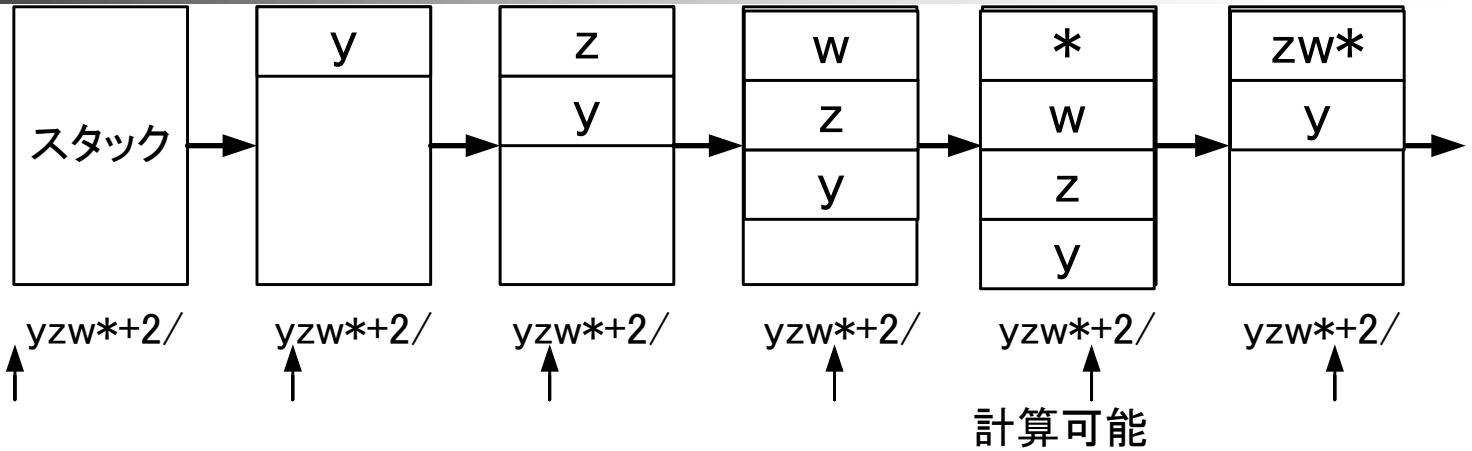
$yzw^* + 2/$ の計算方法 (スタックの変化) を書け

参考: $yz+w*2/$ の計算方法 (前ページ)

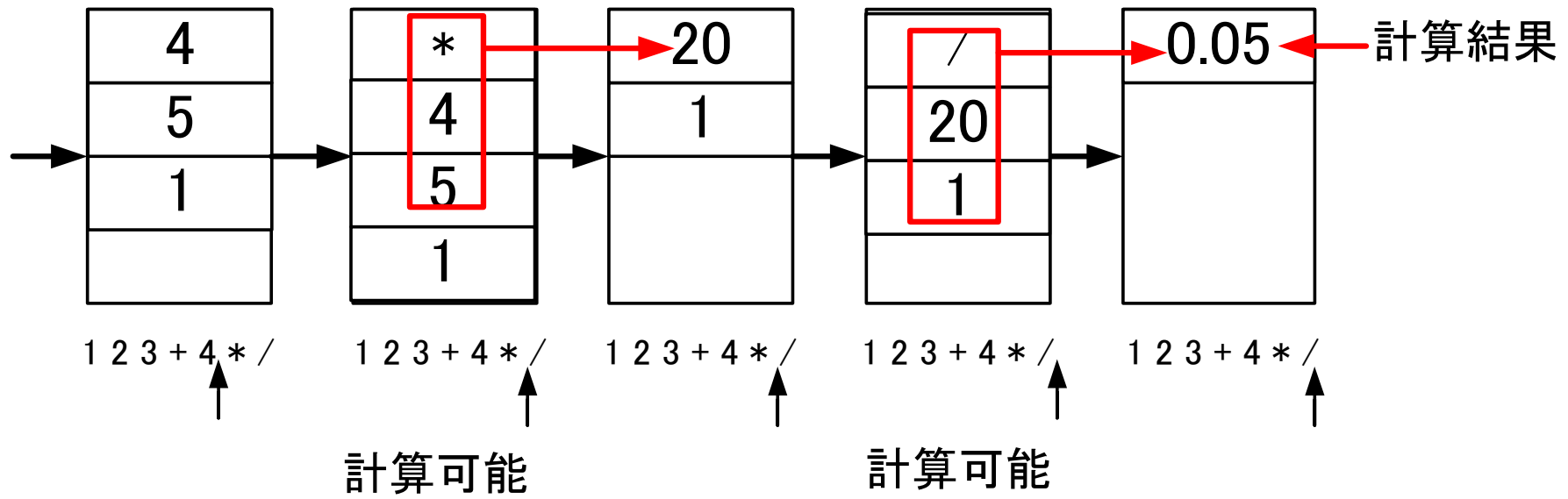
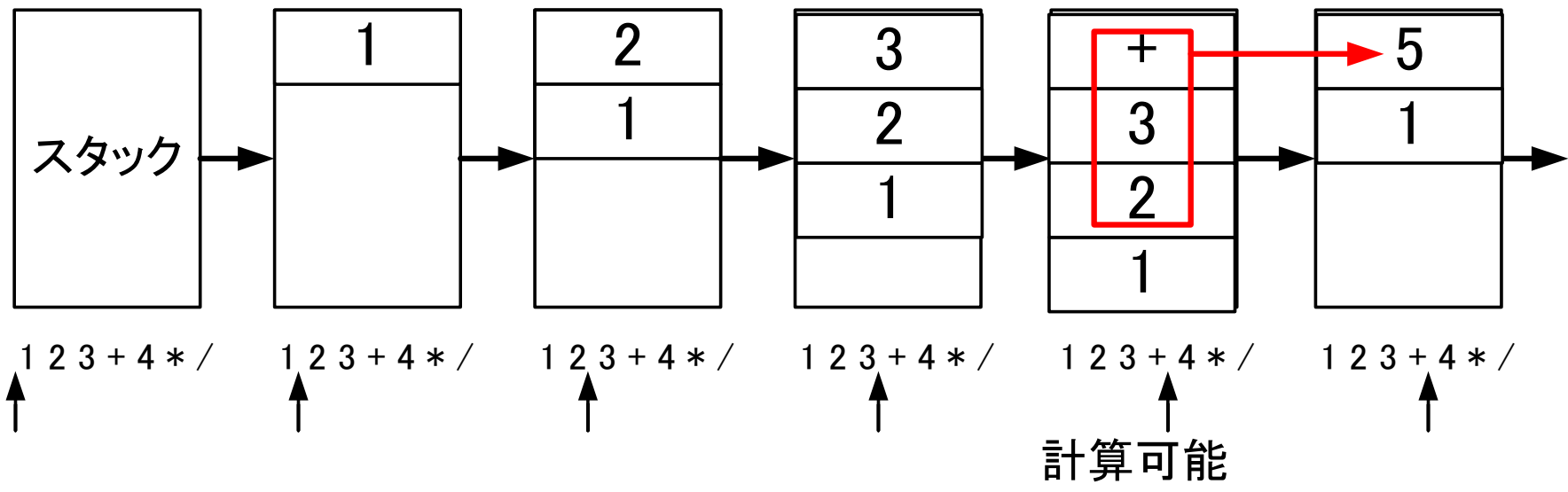


演習問題3の解答

$yzw^* + 2/$ の計算方法を書け



1 2 3 + 4 * / の計算方法





BNF記法の例

- $\langle \text{英数字} \rangle ::= \langle \text{英字} \rangle | \langle \text{数字} \rangle$
 - 英数字とは英字または数字のことである.

- $\langle \text{英字} \rangle ::= a | b | \dots | y | z$
 - 英字とは a, b, \dots, y, z のどれかである



例題2.66 (44ページ)

- 非負の整数を表す10進記法の数値のみからなる言語をBNF記法で定義せよ

- 解

- $\langle \text{数値} \rangle ::= 0 \mid \langle \text{正整数} \rangle$
- $\langle \text{正整数} \rangle ::= \langle \text{非零数字} \rangle \langle \text{数字繰返し} \rangle$
- $\langle \text{非零数字} \rangle ::= 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$
- $\langle \text{数字繰返し} \rangle ::= \epsilon \mid \langle \text{数字} \rangle \langle \text{数字繰返し} \rangle$
- $\langle \text{数字} \rangle ::= 0 \mid \langle \text{非零数字} \rangle$



例題2.68 (45ページ)

- 和 $+$ と積 \times からなる中置記法の数式をBNF記法で定義せよ. 変数はすべて y とし, 括弧 $(,)$ を用いる. 定数は用いない.

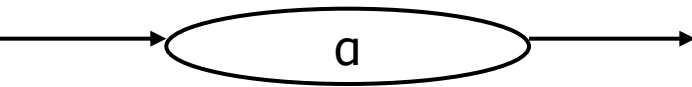
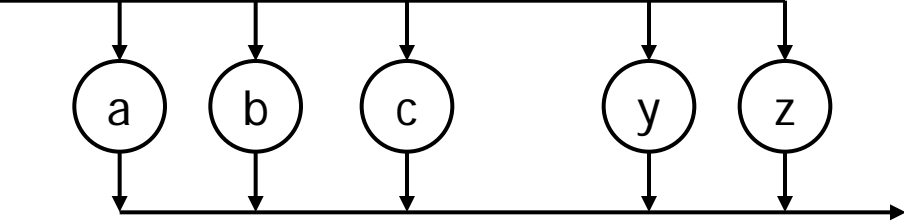
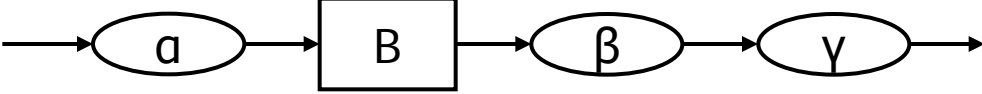
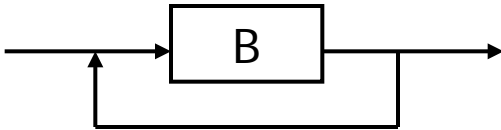
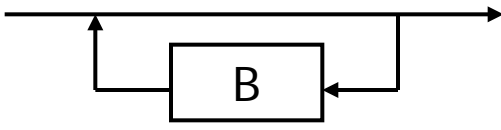
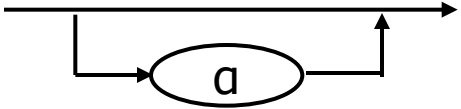
- 解答

- $\langle \text{数式} \rangle ::= \langle \text{変数} \rangle \mid \langle \text{数式} \rangle + \langle \text{数式} \rangle$
 $\mid \langle \text{数式} \rangle \times \langle \text{数式} \rangle \mid (\langle \text{数式} \rangle)$

- $\langle \text{変数} \rangle ::= y$

- 例: $(y+y) \times y, (y \times (y+y))$

構文図式表現とBNF表現 (p.46)

	構文図式	BNF
書き換え		$\langle A \rangle ::= a$
分岐		$\langle A \rangle ::= a b c\dots y z$
連鎖		$\langle A \rangle ::= a\langle B \rangle\beta\gamma$
繰返し		$\langle A \rangle ::= \langle B \rangle \langle B \rangle \langle A \rangle$: BNF $\langle A \rangle ::= \langle B \rangle \{ \langle B \rangle \}$: 拡張BNF
		$\langle A \rangle ::= \epsilon \langle B \rangle \langle A \rangle$: BNF $\langle A \rangle ::= \{ \langle B \rangle \}$: 拡張BNF
オプション		$\langle A \rangle ::= \epsilon a$: BNF $\langle A \rangle ::= [a]$: 拡張BNF



拡張BNF表現

■ 繰り返し表現

■ $\langle A \rangle ::= a|a\langle A \rangle$ aの1回以上の繰り返し

■ 拡張記法 $\langle A \rangle ::= a\{a\}$

■ $\langle A \rangle ::= \varepsilon|a\langle A \rangle$ aの0回以上の繰り返し

■ 拡張記法 $\langle A \rangle ::= \{a\}$

■ オプション

■ $\langle B \rangle ::= \varepsilon|b$ bはなくてもよいし、あってもよい

■ 拡張記法 $\langle B \rangle ::= [b]$

拡張BNF記法の例

Pascal(プログラム言語)の記法

- PASCAL 情報処理シリーズ 2
 - 出版社: 培風館
 - 著者: K.イエンゼン N.ヴィルト (原田賢一訳)
 - 付録D 構文 ([pp.121-131](#))



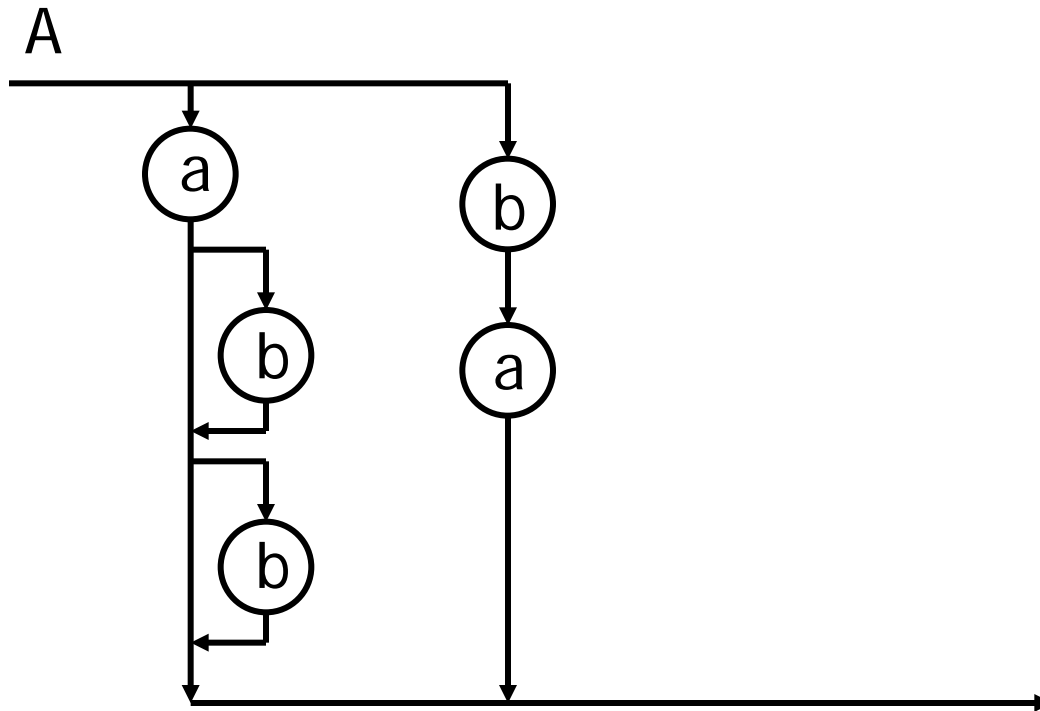
演習問題4 例題2.73改

- つぎのBNF記法による言語の表現を, できるだけ簡単な構文図式で表せ.
- 1. $\langle A \rangle ::= a|ab|abb|ba$
- 2. $\langle A \rangle ::= a|a\langle A \rangle$
- 3. $\langle A \rangle ::= \varepsilon|a|b\langle A \rangle$
- 4. $\langle A \rangle ::= a\langle A \rangle|ba$
- 5. $\langle A \rangle ::= \varepsilon|a\langle A \rangle a|b\langle A \rangle b$

演習問題4の解答

例題2.73-1

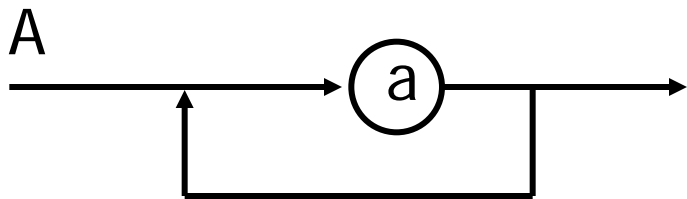
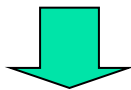
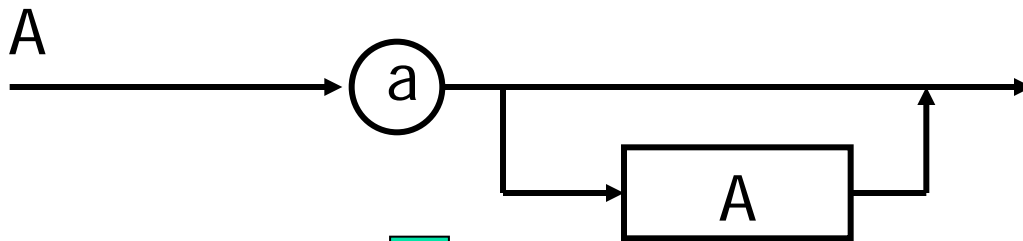
- $\langle A \rangle ::= a|ab|abb|ba$
- $\langle A \rangle ::= [b]a|ab[b]$



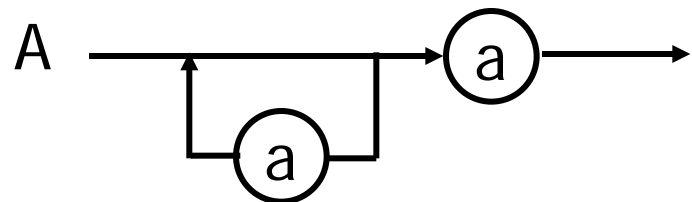
演習問題4の解答

例題2.73-2

- $\langle A \rangle ::= a | a \langle A \rangle$
- $\langle A \rangle ::= a \{ a \}$



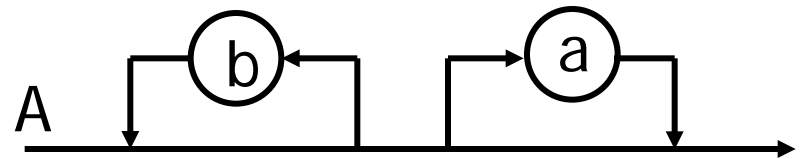
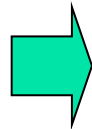
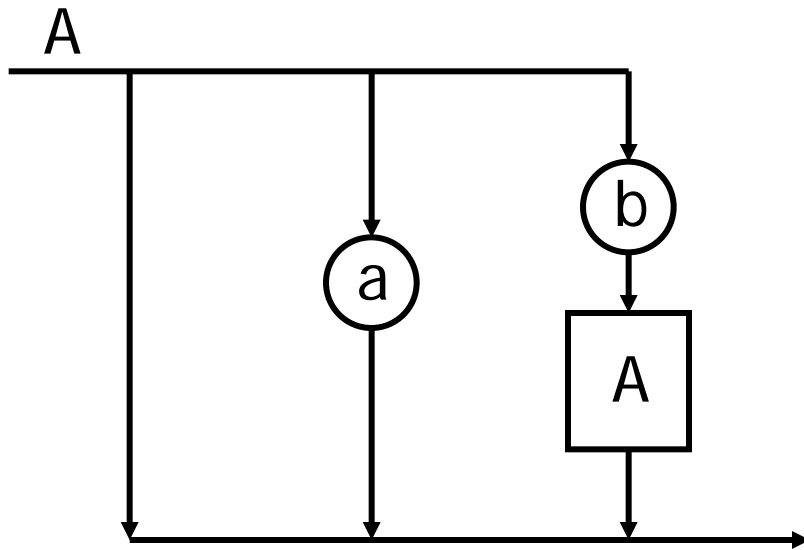
または



演習問題4の解答

例題2.73-3

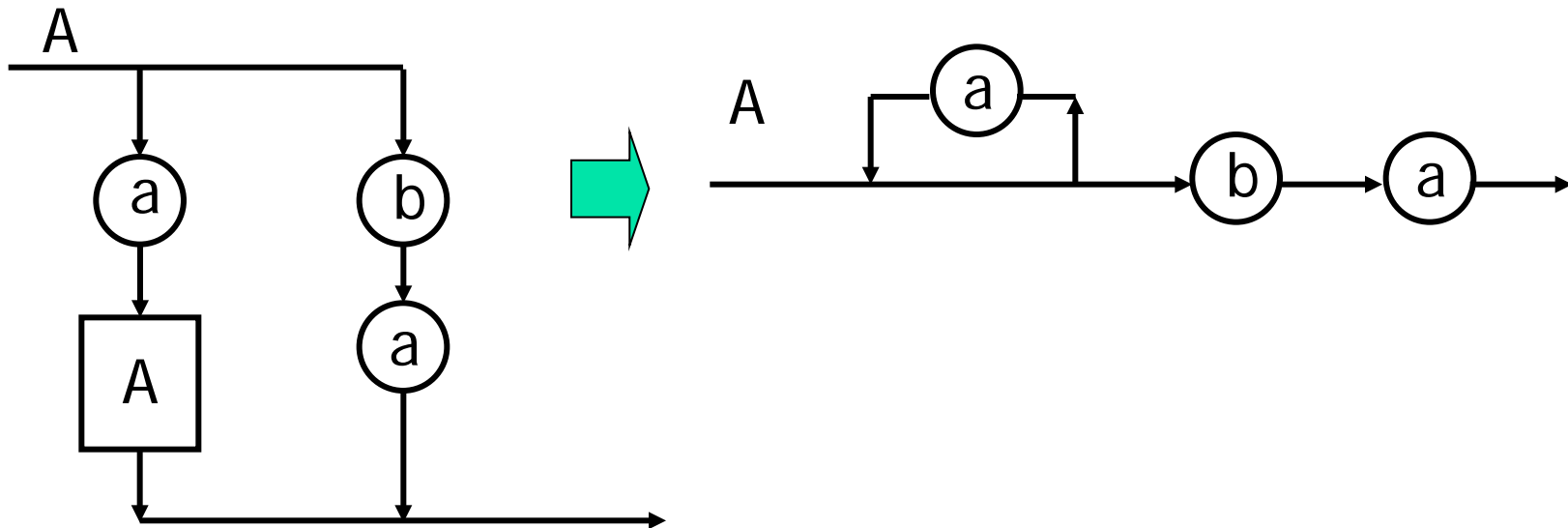
- $\langle A \rangle ::= \varepsilon | a | b \langle A \rangle$
- $\langle A \rangle ::= \{b\}[a]$



演習問題4の解答

例題2.73-4

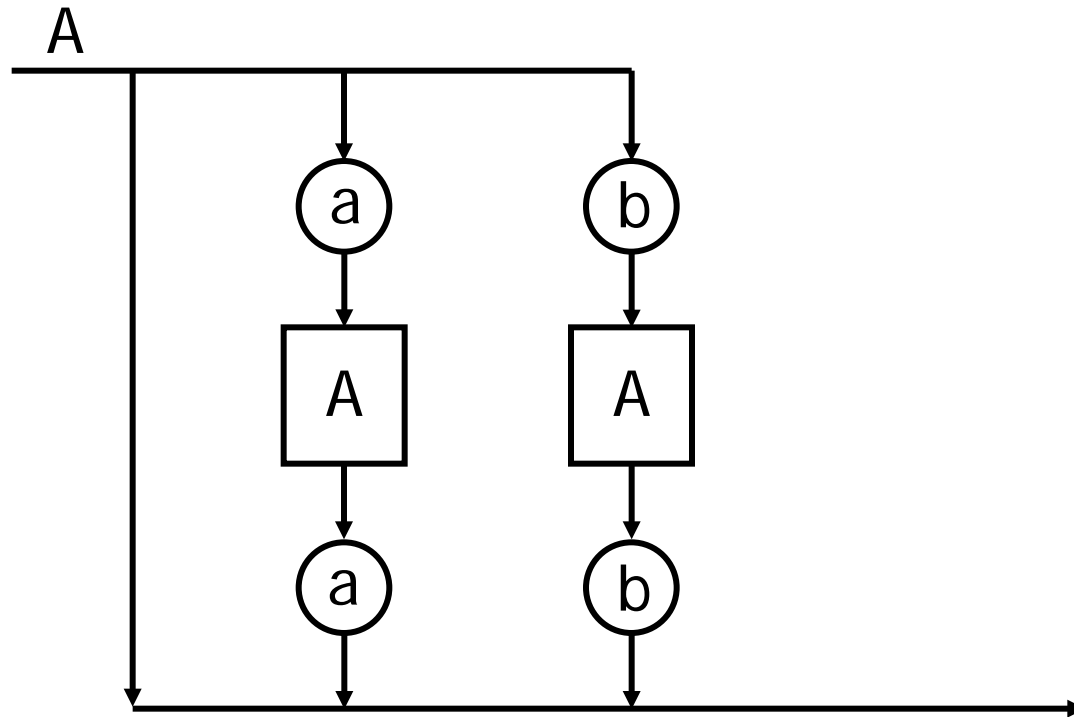
- $\langle A \rangle ::= a \langle A \rangle \mid ba$
- $\langle A \rangle ::= \{a\}ba$



演習問題4の解答

例題2.73-5

- $\langle A \rangle ::= \varepsilon | a \langle A \rangle a | b \langle A \rangle b$





2章のまとめ

- 自動販売機の動作モデル
 - 状態を記憶することが重要
- 数学的帰納法
- 前置, 中置, 後置記法間の変換
 - 中置記法 \leftrightarrow 後置記法
- 後置記法とスタック
 - 後置記法の計算はスタックを利用する
- BNF記法と構文図式
 - 簡単な構文は複数の状態と遷移で記述可能



先週

今週



今日の宿題

■ 数学的帰納法

- 例題2.5を自分で解く
- ユークリッドの互除法のプログラムを作成する

■ 数式記法

- 練習問題2

■ 後置記法とスタック

- $1\ 2\ 3\ +\ 4\ *\ /$ の(スタックを使った)計算方法を理解する