オートマトンと言語
8回目　5月30日(水)

4章　正規表現，非決定性有限オートマトン

授業資料
http://ir.cs.yamanashi.ac.jp/~ysuzuki/public/automaton/

授業の予定(中間試験まで)

回数	月日	内容
1	4月11日	オートマトンとは，オリエンテーション
2	4月18日	2章(数式の記法，スタック，BNF)
3	4月25日	2章(BNF)，3章(グラフ)
4	5月02日	3章(グラフ)
5	5月09日	4章　有限オートマトン1
6	5月16日	有限オートマトン2　2･3章の小テスト
7	5月23日	正規表現
8	5月30日	正規表現，非決定性有限オートマトン
9	6月06日	中間試験，前半のまとめ

出張などにより，授業日が変更になる場合があります．

授業の予定

回数	月日	内容
10	6月13日	NFA→DFA
11	6月20日	DFAの最小化
12	6月27日	DFAの最小化，有限オートマトンの応用
13	7月04日	プッシュダウンオートマトン，チューリング機械
14	7月11日	形式言語理論，文脈自由文法
15	7月18日	期末試験，まとめ

出張などにより，授業日が変更になる場合があります．

今日のメニュー

- 有限オートマトン(状態遷移図)→正規表現
  - 漸化式→連立方程式→正規表現
- 非決定性有限オートマトンとは？
- 非決定性有限オートマトン→決定性有限オートマトン(NFA→DFA)

これからの授業

- 正規表現

⇩

- ε動作を含む非決定性有限オートマトン

⇩

- ε動作を含まない非決定性有限オートマトン

⇩

- 決定性有限オートマトン

⇩

- 決定性有限オートマトンの最小化

4.3 正規表現

- 正規表現
  - 言語にどのような語が含まれているかを比較的わかりやすく表現する表現形式
- 正規表現の定義と性質
  - 正規表現の定義
  - 正規表現の性質
- 有限オートマトンの受理する言語の正規表現

正規表現の定義

- ①φは正規表現である　　　　　　　　L(φ)=空言語
- εは正規表現である　　　　　　　　 L(ε)＝{ε}
- a∈Σならば，aは正規表現である.　L(a)={a}

- ②r,sが正規表現ならば　　　　　　　L(r)=R, L(s)=Sとすると
- 和 (r+s)は正規表現である.　　　　L((r+s))=R∪S: 言語の和
- 積 (rs)は正規表現である.　　　　 L((rs))=RS : 言語の積
- 閉包 (r*)は正規表現である.　　　 L((r*))=R*: 言語の閉包

- ③以上の手続きによって得られるものだけが正規表現である
  - 正規表現は，文字記号と和，積，閉包の演算からなる数式表現
  - 演算子の優先順位：閉包 → 積 → 和

正規表現の例

- {aab} → aab
- {aab, aa} → aab + aa
- {ε, a, aa, aaa, …} → a*
- {aab}∪{b, ba, baa, baaa, …} → aab + ba*

演習問題1　例題4.15　d e f k 言葉で説明

- d: (0+1)*
- e: 0*1*
- f: (0*1*)*
- k: 0(0+1+2)*2

演習問題1の解答例 例題4.15　d e f k

- d : (0+1)*
  - 0 または1を0回以上繰り返す
- e : 0*1*
  - 最初に0を0回以上繰り返し，次に1を0回以上繰り返す
- f : (0*1*)*
  - 最初に0を0回以上繰り返し，次に1を0回以上繰り返す文字列を0回以上繰り返す
- k : 0(0+1+2)*2
  - 最初に0 次に0か1か2を0回以上繰り返し最後に2

ここから

正規言語の性質 1

- r, s, tを正規表現として
- 交換律　r + s = s + r
- 結合律　(r + s) + t = r + (s + t)
- 　　　　(rs)t = r(st)
- べき等律　r + r = r
- 分配律
  - 左分配律　r(s + t) = rs + rt
  - 右分配律　(r + s) t = rt + st

正規言語の性質 2

単位元

$$r+\phi=r \quad r\varepsilon=\varepsilon r=r \quad r\phi=\phi r=\phi$$

スター演算に関する性質

$$\phi^*=\varepsilon$$

$$r^*=(r^*)^*=(\varepsilon+r)^*=\varepsilon+rr^*=\varepsilon+r^*r=r^*r^*$$

$$(r+s)^*=(r^*s^*)^*=(r^*s)^*r^*=r^*(sr^*)^*$$

$$=r^*+r^*s(r+s)^*=(r^*s)^*+(s^*r)^*$$

$$(rs)^*r=r(sr)^*$$

$$(rs+r)^*r=r(sr+r)^*$$

$$(r^*s)^*=\varepsilon+(r+s)^*s$$

$$(rs^*t)^*=\varepsilon+r(s+tr)^*t$$

正規言語の性質 3 (p98 (4.7),(4.8))

重要

- x, s, tが正規表現のとき，
  $\varepsilon \notin L(t)$とすると
  つぎの性質が成立する．

$$x = s + xt \quad \text{ならば} \quad x = st^*$$

$$x = s + tx \quad \text{ならば} \quad x = t^*s$$

ちょっと脱線 x=s+txならばx=t*sとはどういう意味か

- x: 額面500円の図書券（現在は発行終了）
- s: 500円の本
- t: 15円の本（無いと思いますが）
- x=s+tx: 500円の図書券を持っていれば，500円の本か「15円の本＋500円の図書券」を手に入れられる
  - 500円の図書券で15円の本を買うと485円おつりをもらえる．
  - 500円の図書券は金券ショップで485円で購入可能
- x=t*s : 500円の図書券を持っていると0冊以上の15円本と1冊の500円の本を買うことができる

演習問題2 例題4.20 a, b, c

- a: x=0+x0
- b: x=00+11+x0+x1
- c: x=01+x0*1

演習問題2の解答例 例題4.20 a, b, c

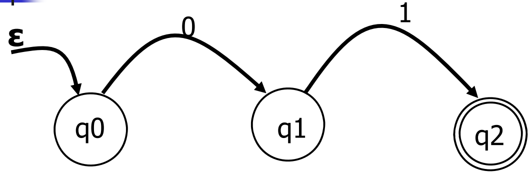
x=s+xt ならば x=st*
x=s+tx ならば x=t*s

- a :
  - x=0+x0
  - → x=00*
- b :
  - x=00+11+x0+x1
  - → x=(00+11)+x(0+1)
  - → x=(00+11)(0+1)*
- c :
  - x=01+x0*1
  - → x=01(0*1)*

有限オートマトンの受理する言語の正規表現

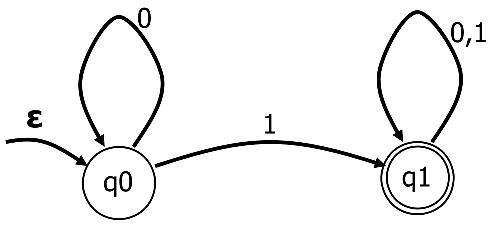
- 有限オートマトンの受理する言語を正規表現で表す

例題4.22a (p.100)



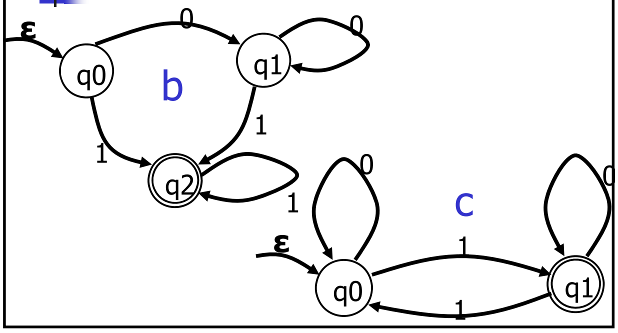
正規表現：01

例題4.23 a

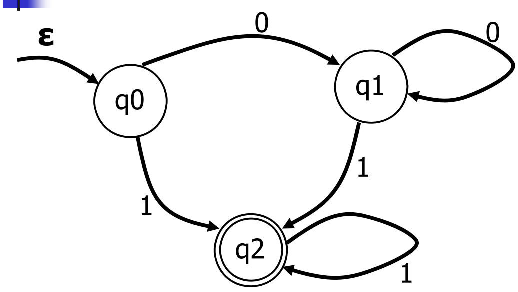


正規表現:0*1(0+1)*

練習問題3　例題4.23 b,c



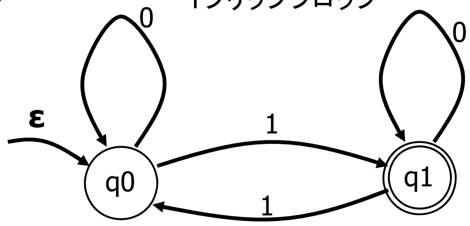
練習問題3の解答例b
例題4.23 b



正規表現:00*11*+11* -> (00*1+1)1*

練習問題3 例題4.23 c の解答例

Tフリップフロップ

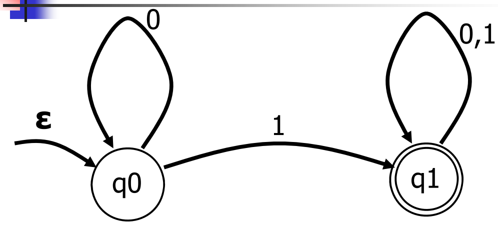


正規表現: $\underbrace{(0^*10^*1)^*}_{\text{q0→q1→q0を0回以上繰り返し}}\underbrace{0^*10^*}_{\text{q0→q1}}$

状態q_iで受理される言語

- DFA(決定性有限オートマトン)における任意の状態q_iに対して，ある語の入力終了時にq_iで停止するとき，「q_iはその語を受理した」という.
- q_iで受理される語の集合を「q_iで受理される言語」という

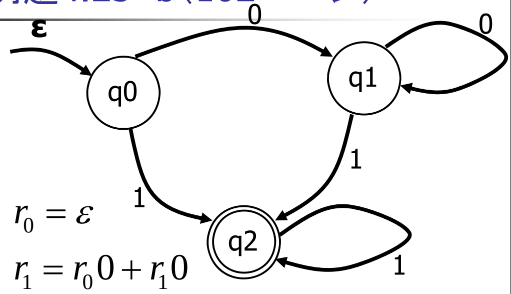
例題4.25 （102ページ）



q0で受理する言語　$r_0 = \varepsilon + r_0 0$

q1で受理する言語　$r_1 = r_0 1 + r_1 (0+1)$

例題4.25 b（102ページ）

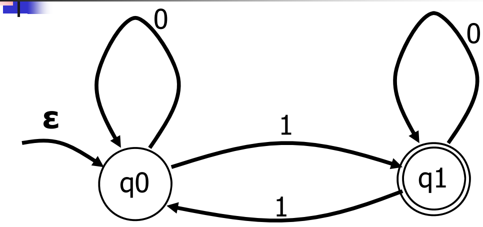


q0で受理する言語 $r_0=\varepsilon$

q1で受理する言語 $r_1=r_0 0+r_1 0$

q2で受理する言語 $r_2=r_0 1+r_1 1+r_2 1$

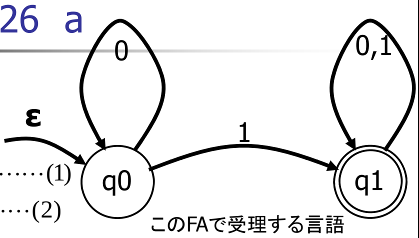
例題4.25 c（102ページ）



q0で受理する言語 $r_0=\varepsilon+r_0 0+r_1 1$

q1で受理する言語 $r_1=r_0 1+r_1 0$

例題4.26 a



$r_0=\varepsilon+r_0 0\cdots\cdots(1)$

$r_1=r_0 1+r_1(0+1)\cdots\cdots(2)$

求めるのはr_1

(1)より，$r_0=\varepsilon 0^*=0^*\cdots(3)$

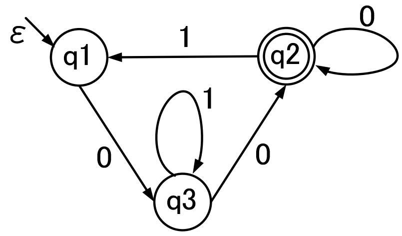
(3)を(2)へ代入して，$r_1=0^*1+r_1(0+1)$

これより，$r_1=0^*1(0+1)^*$……98ページ(4.7)より

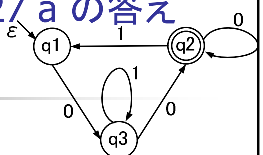
このFAで受理する言語
=q1で受理する言語
=0*1(0+1)*

練習問題4　例題4.27 a

- 下の状態遷移図で示されるDFAの受理する言語について，それを表す正規表現を求めよ



練習問題4　例題4.27 a の答え



$r_1=\varepsilon+r_2 1\cdots\cdots(1)$

$r_2=r_2 0+r_3 0\cdots(2)$

$r_3=r_3 1+r_1 0\cdots(3)$

(3)に(1)を代入して$r_3=r_3 1+(\varepsilon+r_2 1)0\cdots(4)$

(4)を変形して$r_3=r_3 1+(0+r_2 10)$

$p.98$の(4.7)より$r_3=(0+r_2 10)1^*\cdots(5)$

(2)に(5)を代入して$r_2=r_2 0+(0+r_2 10)1^*0$

$r_2=r_2 0+01^*0+r_2 101^*0$

$r_2=r_2(0+101^*0)+01^*0$

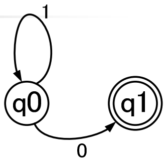
$p.98$の(4.7)より$r_2=01^*0(0+101^*0)^*$

4.4 DFAと正規表現の同等性およびDFAの最小化

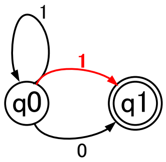
- 4.4.1 非決定性有限オートマトン
- 4.4.2 非決定性FAの決定性FAへの変換
- 4.4.3 ε-動作を含むNFA
- 4.4.4 正規表現で表された言語を受理するε-NFA
- 4.4.5 Myhill-Nerodeの定理と有限オートマトンの最小化
- 4.4.6 有限オートマトンの応用

非決定性有限オートマトン

- 決定性有限オートマトン（DFA）
  - 入力が決まると動作は一意に決まる



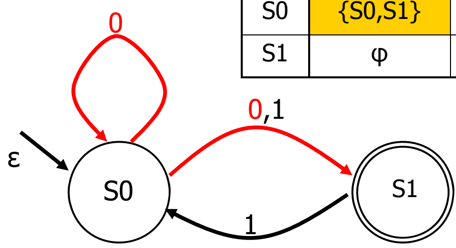
- 非決定性有限オートマトン（NFA）
  - 入力が決まっても動作は一意には決まらない
  - 文字列の入力終了時に状態遷移で到達可能な状態のなかに一つでも受理状態があれば，入力語は受理される．



例題4.29
NFAの状態遷移図

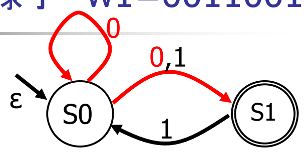
状態遷移関数表

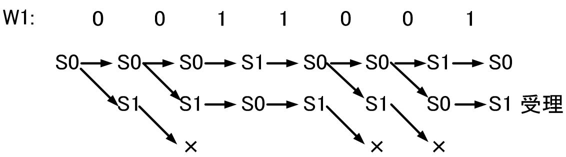
δ	0	1
S0	{S0,S1}	{S1}
S1	φ	{S0}



例題4.29
状態遷移の様子　w1=0011001

δ	0	1
S0	{S0,S1}	{S1}
S1	φ	{S0}

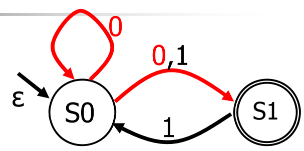


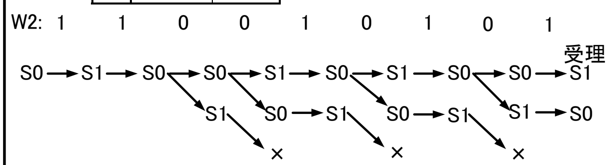


W1: 受理される

例題4.29
状態遷移の様子　w2=110010101

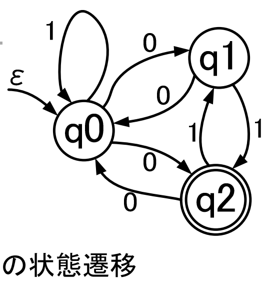
δ	0	1
S0	{S0,S1}	{S1}
S1	φ	{S0}





W2: 受理される

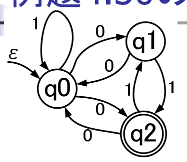
練習問題1
例題4.30



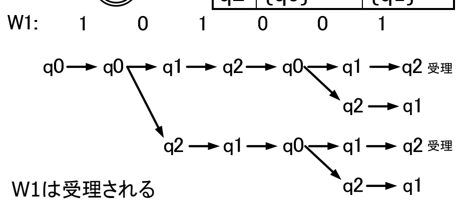
- 状態遷移関数表
- w=101001のときの状態遷移
- 受理？

中間試験の範囲はここまで

練習問題1
例題4.30の答え



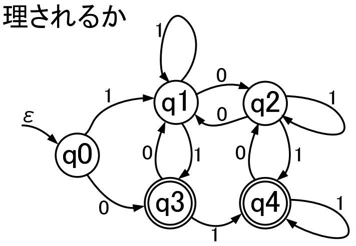
δ	0	1
q0	{q1,q2}	{q0}
q1	{q0}	{q2}
q2	{q0}	{q1}



W1は受理される

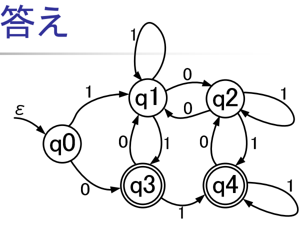
練習問題2
例題4.31 a 改

- 状態遷移関数表
- w1=010011と入力したときの状態遷移
- w1は受理されるか



練習問題2
例題4.31 aの答え

δ	0	1
q0	{q3}	{q1}
q1	{q2}	{q1,q3}
q2	{q1}	{q2,q4}
q3	{q1}	{q4}
q4	{q2}	{q4}



W1: 0 1 0 0 1 1

q0 → q3 → q4 → q2 → q1 → q1 → q1

q3 受理

q3 → q4 受理

W1は受理される

非決定性状態遷移関数 δ'

状態遷移関数を漸化式的に説明

$w \in \sum^*,\ a \in \sum$, $q \in Q$に対して(wは入力文字列，aは入力文字)

$\delta'(q,\varepsilon) = \{q\}$

$\delta'(q,wa) = \{r \mid r \in \delta(s,a),\ s \in \delta'(q,w)\}$

説明:

状態qから入力文字列waにより遷移する状態は

状態qから入力文字列wにより遷移する状態sから

入力文字aにより遷移する状態.

NFA(Q,Σ,δ,q_0,F)の受理する言語

$$L(M) = \left\{ w \mid w \in \sum^*,\ \delta(q_0,w) \cap F \neq \phi \right\}$$

説明

- 入力語wに対して最後に到達可能な状態が一つでも受理状態ならそのNFAは語wを受理する

•受理言語：受理される語の集合

今日のまとめ

- 正規表現
  - 有限オートマトン→正規表現
- 非決定性有限オートマトン
  - 非決定性有限オートマトンとは
  - 非決定性有限オートマトン→決定性有限オートマトン