

オートマトンと言語

10回目 6月13日(水)

4章 非決定性有限オートマトン

授業の予定(中間試験まで)

回数	月日	内容
1	4月11日	オートマトンとは, オリエンテーション
2	4月18日	2章(数式の記法, スタック, BNF)
3	4月25日	2章(BNF), 3章(グラフ)
4	5月02日	3章(グラフ)
5	5月09日	4章 有限オートマトン1
6	5月16日	有限オートマトン2 2・3章の小テスト
7	5月23日	正規表現
8	5月30日	正規表現, 非決定性有限オートマトン
9	6月06日	中間試験, 前半のまとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります。

授業の予定

回数	月日	内容
10	6月13日	NFA→DFA
11	6月20日	DFAの最小化
12	6月27日	DFAの最小化, 有限オートマトンの応用
13	7月04日	プッシュダウンオートマトン, チューリング機械
14	7月11日	形式言語理論, 文脈自由文法
15	7月18日	期末試験, まとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります。

中間試験の問題と解答例

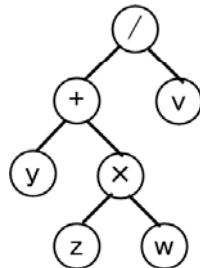
問題1(15点) 記法, 構文木

- 次の数式(前置記法)の構文木を描け. また中置記法と後置記法に変換せよ.

- 前置記法: $/+y \times zw$

- 中置記法: $(y+(z \times w))/y$

- 後置記法: $yzw \times +v/$

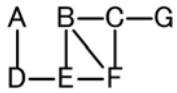


問題2(15点) グラフ 用語の説明

- 下の用語を説明しなさい.
- a. 正則グラフ:
 - 全ての節点の次数が等しいグラフ
- b. 2部グラフ:
 - 節点集合を2つにわけて, それぞれの集合内の節点を結ぶ辺が無いグラフ
- c. ハミルトングラフ:
 - 全ての節点を1度だけ通る閉路(ハミルトン閉路)の存在する多重グラフ

問題3 (15点) グラフ

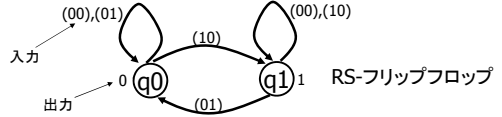
- 下のグラフについて答えよ。



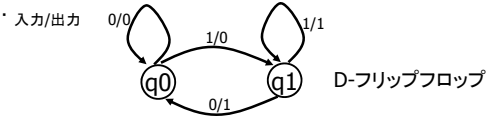
- 1) グラフの直径を求めよ。 5
- 2) 切断点はどれか、すべて示せ。 D, E, C
- 3) ブリッジはどれか、すべて示せ。 A-D, D-E, C-G

問題4 (10点) ムーア機械, ミーリー機械

- ムーア機械とミーリー機械の違いを説明しなさい。
- ムーア機械: 出力が遷移先の状態で決まる。

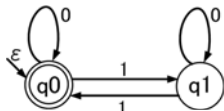


- ミーリー機械: 出力が遷移前の状態と入力で決まる。



問題5 (15点) 有限オートマトンと言語の受理

- 下の図で示す状態遷移図で表される有限オートマトンを考える。次の間にそれぞれ答えよ。



- (1) この有限オートマトン $M(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ の要素を明示せよ。

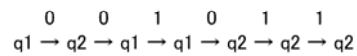
- $Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{0, 1\}, \delta =$ 下の表, $S = \{q_0\}, F = \{q_0\}$

δ	0	1
q1	q2	q1
q2	q1	q2

問題5 (15点) 有限オートマトンと言語の受理

- 下の図で示す状態遷移図で表される有限オートマトンを考える。次の間にそれぞれ答えよ。

- (2) Mに $w = 001011$ を入力したときの状態の遷移状況を示せ。また w が受理されるかどうか答えよ。

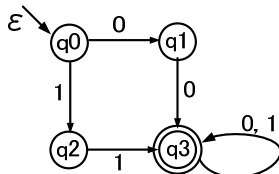


- w は受理されない
- (3) Mの受理する言語はどのようなものか説明せよ。

- 入力 $\{0, 1\}$ で1が0個か偶数個の文字列からなる言語

問題6 状態遷移図 → 正規表現 (10点)

- 下の図のような状態遷移図で示されるDFAの受理する言語について、それを表す正規表現を求めよ。

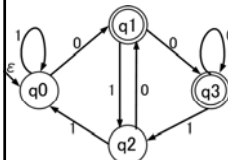


$$00(0+1)^* + 11(0+1)^*$$

$$= (00+11)(0+1)^*$$

問題7 状態遷移図 → 正規表現 (10点)

- 下の図のような状態遷移図で示されるDFAの受理する言語について、それを表す正規表現を求めよ。ただし導出過程も記すこと。



$$r_0 = \varepsilon + r_0 1 + r_2 1$$

$$r_1 = r_0 0 + r_2 0$$

$$r_2 = r_1 1 + r_3 1$$

$$r_3 = r_1 0 + r_3 0$$

$$r_a = r_0 + r_2 = \varepsilon + r_0 1 + r_2 1 + r_1 1 + r_3 1$$

$$r_b = r_1 + r_3 = r_0 0 + r_2 0 + r_1 0 + r_3 0$$

$$r_a = \varepsilon + r_a 1 + r_b 1$$

$$r_b = r_a 0 + r_b 0$$

$$r_a = \varepsilon + r_b 1 + r_a 1 = (\varepsilon + r_b 1) 1^*$$

$$r_b = (\varepsilon + r_b 1) 1^* 0 + r_b 0$$

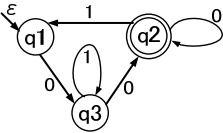
$$= 1^* 0 + r_b 11^* 0 + r_b 0$$

$$= 1^* 0 + r_b (11^* 0 + 0)$$

$$r_b = r_1 + r_3 = 1^* 0 (11^* 0 + 0)^*$$

問題8 状態遷移図→正規表現 (10点)

- 下の図のような状態遷移図で示されるDFAの受理する言語について、それを表す正規表現を求めよ。ただし導出過程も記すこと。



$$r_1 = \epsilon + r_2 1 \dots (1)$$

$$r_2 = r_2 0 + r_3 0 \dots (2)$$

$$r_3 = r_3 1 + r_1 0 \dots (3)$$

(3)に(1)を代入して $r_3 = r_3 1 + (\epsilon + r_2 1) 0 \dots (4)$

(4)を変形して $r_3 = r_3 1 + (0 + r_2 1) 0$

p.98の(4.7)より $r_3 = (0 + r_2 1) 1^* \dots (5)$

(2)に(5)を代入して $r_2 = r_2 0 + (0 + r_2 1) 1^* 0$

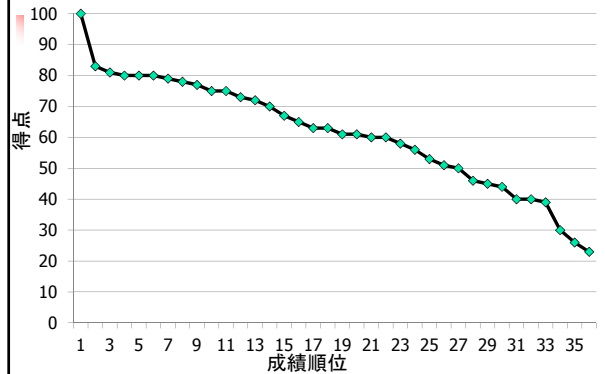
$$r_2 = r_2 0 + 0 1^* 0 + r_2 1 1^* 0$$

$$r_2 = r_2 (0 + 1 1^* 0) + 0 1^* 0$$

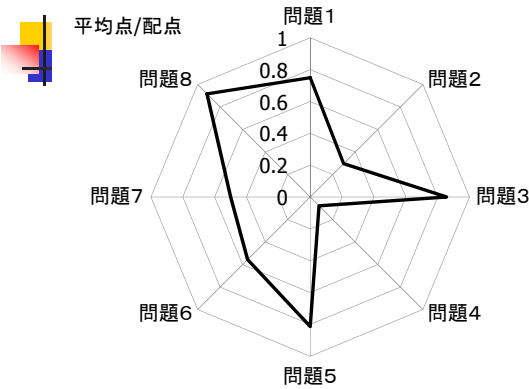
p.98の(4.7)より $r_2 = 0 1^* 0 (0 + 1 1^* 0)^*$

中間テストの結果

平均点: 61点, 最高点: 100点(1人), 最低点: 23点



中間試験の結果(問題別)



今日のメニュー

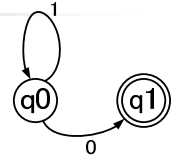
- 非決定性有限オートマトン
- 非決定性有限オートマトン→決定性有限オートマトン(NFA→DFA)
- ϵ 動作を含むNFA→ ϵ 動作を含まないNFA
- 正規表現→ ϵ 動作を含むNFA

4.4 DFAと正規表現の同等性およびDFAの最小化

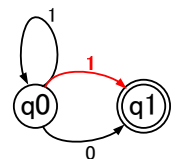
- 4.4.1 非決定性有限オートマトン
- 4.4.2 非決定性FAの決定性FAへの変換
- 4.4.3 ϵ -動作を含むNFA
- 4.4.4 正規表現で表された言語を受理する ϵ -NFA
- 4.4.5 Myhill-Nerodeの定理と有限オートマトンの最小化
- 4.4.6 有限オートマトンの応用

非決定性有限オートマトン

- 決定性有限オートマトン(DFA)
 - 入力が決まると動作は一意に決まる



- 非決定性有限オートマトン(NFA)
 - 入力が決まっても動作は一意には決まらない
 - 文字列の入力終了時に状態遷移で到達可能な状態のなかの一つでも受理状態があれば、入力語は受理される。

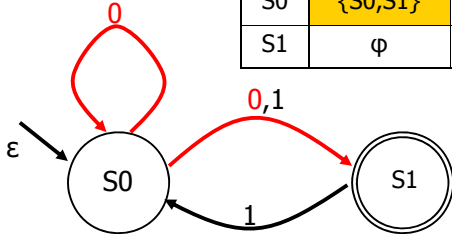


例題4.29

NFAの状態遷移図

状態遷移関数表

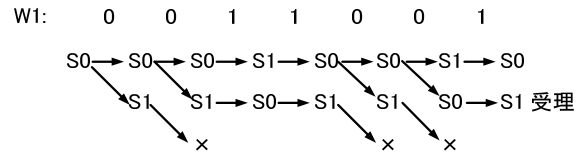
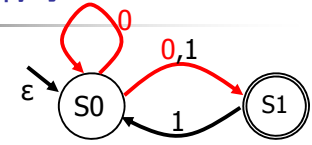
δ	0	1
S0	{S0,S1}	{S1}
S1	ϕ	{S0}



例題4.29

状態遷移の様子 w1=0011001

δ	0	1
S0	{S0,S1}	{S1}
S1	ϕ	{S0}

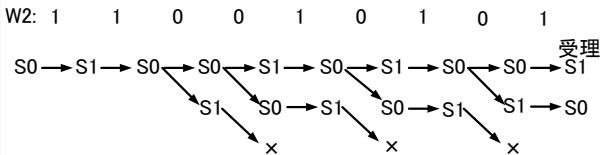
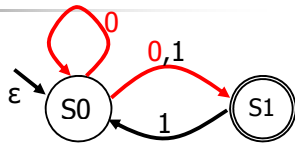


W1: 受理される

例題4.29

状態遷移の様子 w2=110010101

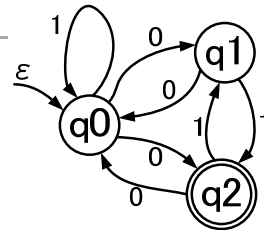
δ	0	1
S0	{S0,S1}	{S1}
S1	ϕ	{S0}



W2: 受理される

練習問題1

例題4.30

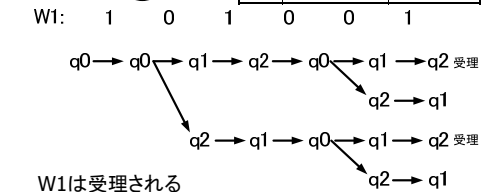


- 状態遷移関数表
- w=101001のときの状態遷移
- 受理？

練習問題1

例題4.30の答え

δ	0	1
q0	{q1,q2}	{q0}
q1	{q0}	{q2}
q2	{q0}	{q1}

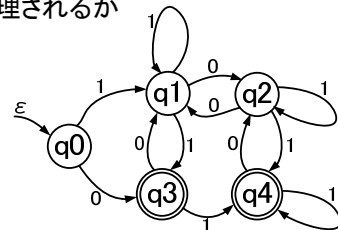


W1は受理される

練習問題2

例題4.31 a 改

- 状態遷移関数表
- w1=010011と入力したときの状態遷移
- w1は受理されるか



練習問題2

例題4.31 aの答え

δ	0	1
q0	{q3}	{q1}
q1	{q2}	{q1,q3}
q2	{q1}	{q2,q4}
q3	{q1}	{q4}
q4	{q2}	{q4}

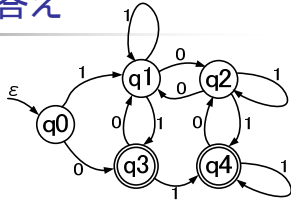
W1:

0 1 0 0 1 1 1
 q0 → q3 → q4 → q2 → q1 → q1 → q1

q3 受理

q3 → q4 受理

W1は受理される



非決定性状態遷移関数 δ'

状態遷移関数 (文字列入力) を漸化式的に説明

$w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, $q \in Q$ に対して (w は入力文字列, a は入力文字)

$\delta'(q, \epsilon) = \{q\}$

$\delta'(q, wa) = \{r \mid r \in \delta(s, a), s \in \delta'(q, w)\}$

説明:

状態 q から入力文字列 wa により遷移する状態は

状態 q から入力文字列 w により遷移する状態 s から

入力文字 a により遷移する状態。

NFA($Q, \Sigma, \delta, q_0, F$)の受理する言語

$$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \delta(q_0, w) \cap F \neq \phi\}$$

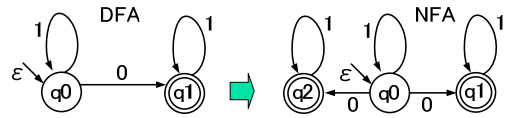
説明

• 入力語 w に対して最後に到達可能な状態が一つでも受理状態ならそのNFAは語 w を受理する

• 受理言語: 受理される語の集合

4.4.2 非決定性FAの決定性FAへの変換(p.107)

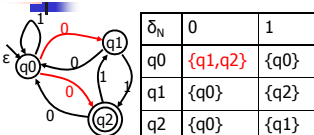
■ あるDFAで受理できる言語を受理するNFAは簡単に構成できる(DFA→NFAは簡単)



■ NFA→DFAは可能か?

■ 可能(変換方法は後で説明)

例題4.33 例題4.30のNFAの受理する言語を受理するDFAを構成せよ (NFA→DFA)

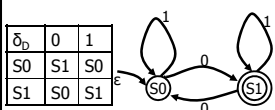


δ_N	0	1
q0	{q1,q2}	{q0}
q1	{q0}	{q2}
q2	{q0}	{q1}

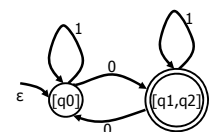
DFA化

δ_D	0	1
[q0]	[q1,q2]	[q0]
[q1,q2]	[q0]	[q1,q2]

[]: 状態集合ラベル



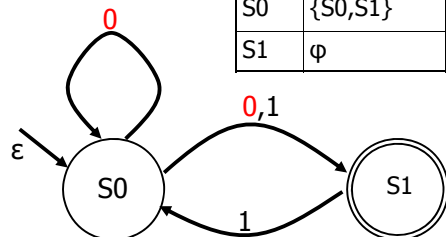
状態ラベルの付換え



例題4.35 (例題4.29)

NFA → DFA

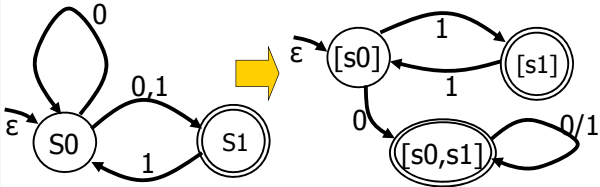
δ	0	1
S0	{S0,S1}	{S1}
S1	ϕ	{S0}



例題4.35 (例題4.29)の答え

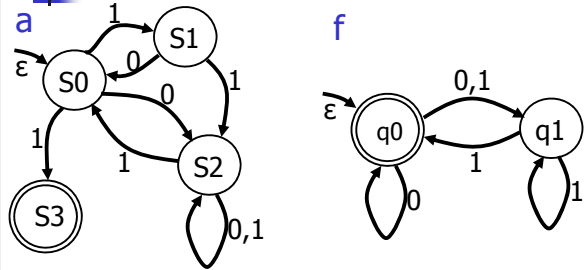
重要!

δ_{NFA}	0	1	初期状態からの遷移を調べる	δ_{DFA}	0	1	初期状態からの遷移を調べる
S0	{S0,S1}	{S1}	各遷移先からの遷移を調べる	[s0]	{s0,s1}	[s1]	新しい遷移先が無ければ終了
S1	ϕ	{S0}		[s0,s1]	{s0,s1}	[s0,s1]	
			[s1]	----	[s0]		



練習問題3

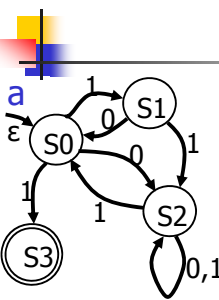
例題4.36 a, f



練習問題3 例題4.36 aの答え 1/2

δ_{NFAa}	0	1
S0	{S2}	{S1,S3}
S1	{S0}	{S2}
S2	{S2}	{S0,S2}
S3	ϕ	ϕ

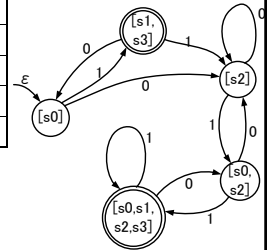
δ_{DFAa}	0	1
[s0]	[s2]	[s1,s3]
[s2]	[s2]	[s0,s2]
[s1,s3]	[s0]	[s2]
[s0,s2]	[s2]	[s0,s1,s2,s3]
[s0,s1,s2,s3]	[s0,s2]	[s0,s1,s2,s3]



練習問題3

例題4.36 aの答え 2/2

δ_{DFAa}	0	1
[s0]	[s2]	[s1,s3]
[s2]	[s2]	[s0,s2]
[s1,s3]	[s0]	[s2]
[s0,s2]	[s2]	[s0,s1,s2,s3]
[s0,s1,s2,s3]	[s0,s2]	[s0,s1,s2,s3]

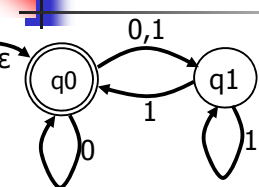


練習問題3

例題4.36 fの答え 1/2

δ_{NFAf}	0	1
q0	{q0,q1}	{q1}
q1	ϕ	{q0,q1}

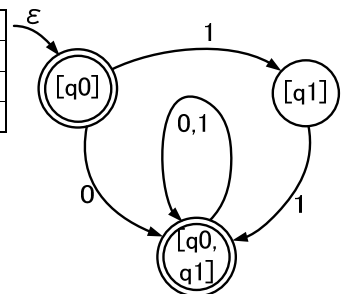
δ_{DFAf}	0	1
[q0]	[q0,q1]	[q1]
[q1]	----	[q0,q1]
[q0,q1]	[q0,q1]	[q0,q1]



練習問題3

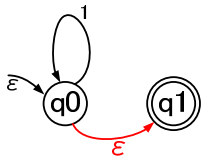
例題4.36 fの答え 2/2

δ_{DFAf}	0	1
[q0]	[q0,q1]	[q1]
[q1]	----	[q0,q1]
[q0,q1]	[q0,q1]	[q0,q1]



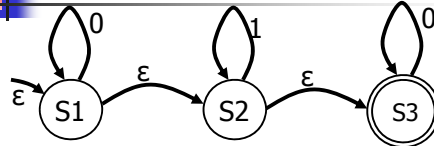
4.4.3 ϵ -動作を含むNFA

- 空語入力による遷移 $\rightarrow \epsilon$ -遷移
- ϵ -NFAの状態遷移関数の定義
 - $\delta: Q \times (\Sigma + \{\epsilon\}) \rightarrow P(Q)$



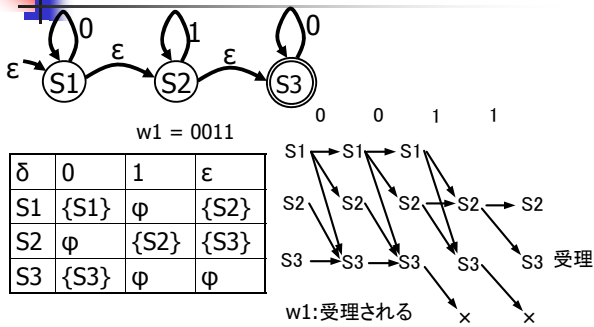
δ	1	ϵ
q0	{q0}	{q1}
q1	\varnothing	\varnothing

練習問題4 例題4.37

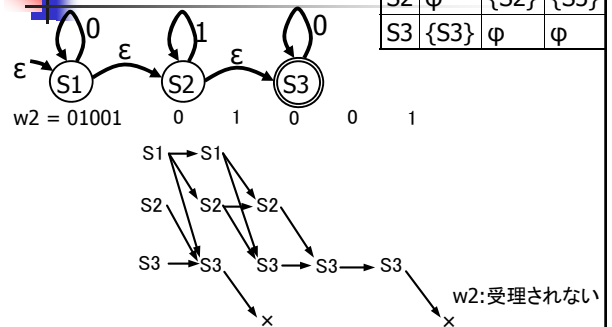


W1: 0011
W2: 01001

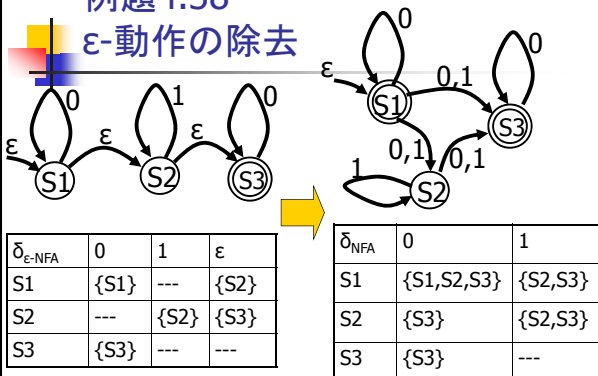
練習問題4 例題4.37 w1 答え



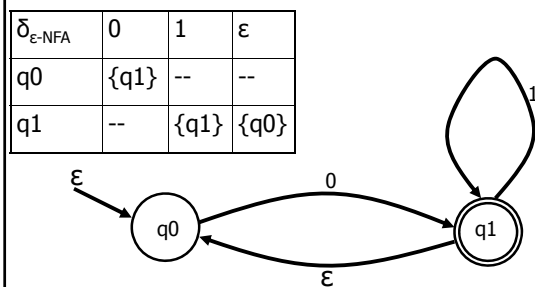
練習問題4 例題4.37 w2 答え



例題4.38 ϵ -動作の除去

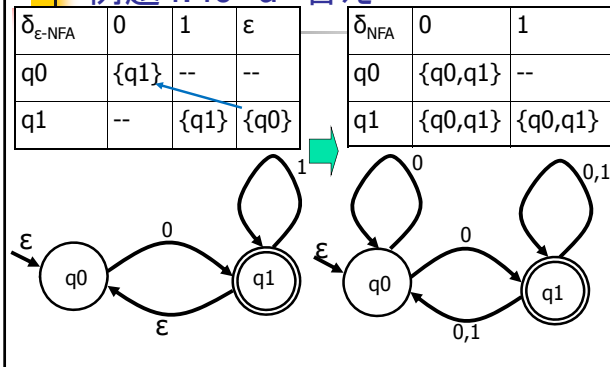


練習問題5 例題4.40 a



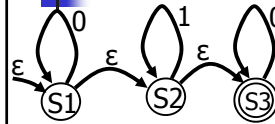
練習問題5

例題4.40 a 答え



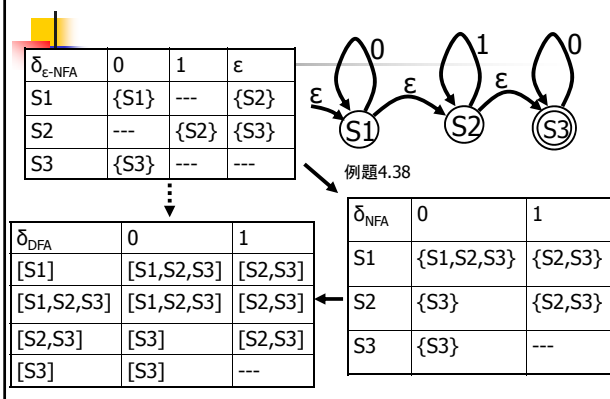
例題4.41 (p.112)

$\epsilon\text{-NFA} \rightarrow \text{DFA}$

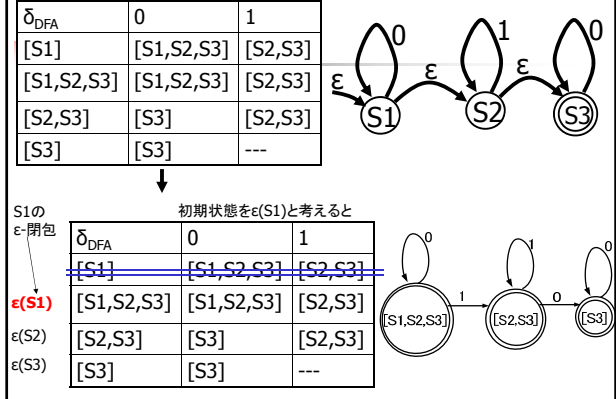


$\delta_{\epsilon\text{-NFA}}$	0	1	ϵ
S1	{S1}	---	{S2}
S2	---	{S2}	{S3}
S3	{S3}	---	---

例題4.41 1/2 $\epsilon\text{-NFA} \rightarrow \text{NFA} \rightarrow \text{DFA}$



例題4.41 2/2 $\epsilon\text{-NFA} \rightarrow \text{NFA} \rightarrow \text{DFA}$



4.4.4 正規表現で表された言語を受理する $\epsilon\text{-NFA}$

- (1) 正規言語の閉包性
 - 正規言語: FAの受理する言語, あるいは正規表現の表す言語のクラス
 - 正規言語は言語の和, 接続, クリーネ閉包(Σ^*)について閉じている
 - 正規言語は和, 積, 補の集合演算についても閉じている
- 閉じている: 教科書8ページ
 クリーネ閉包: 教科書33ページ
 接続: 教科書34ページ

(2) 正規表現から $\epsilon\text{-NFA}$ への変換

- 113ページ

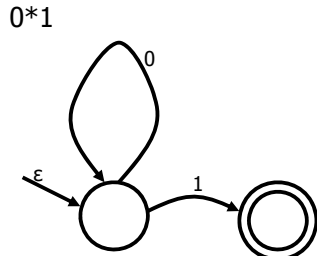
正規表現から直接DFAへの変換は難しい
 → まず $\epsilon\text{-NFA}$ に変換する。

P.114 P.110 P.108
 正規表現 \rightarrow $\epsilon\text{-NFA}$ \Rightarrow NFA \Rightarrow DFA

重要!

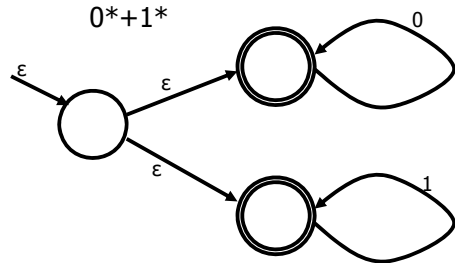
例題4.45 c : 0^*1

正規表現 → ϵ -NFAの状態遷移図



例題4.45 h : 0^*+1^*

正規表現 → ϵ -NFAの状態遷移図



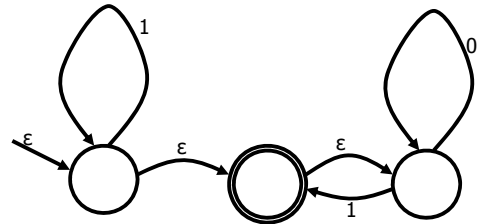
練習問題6

例題4.47 a

- $1^*(0^*1)^*$
- 正規表現 → ϵ -NFAの状態遷移図

練習問題6 例題4.47 a 答え

- $1^*(0^*1)^*$
- 正規表現 → ϵ -NFAの状態遷移図



今日のまとめ

- 中間試験の解答例, 結果
- 非決定性有限オートマトン
- 非決定性有限オートマトン → 決定性有限オートマトン (NFA → DFA)
- ϵ 動作を含むNFA → ϵ 動作を含まないNFA
- 正規表現 → ϵ 動作を含むNFA

今日のまとめ

- 中間試験の解答例
- 中間試験の結果
- 非決定性有限オートマトン
 - 非決定性有限オートマトン → 決定性有限オートマトン
 - ϵ 遷移を含んだ非決定性有限オートマトン
 - ϵ 遷移を含んだ非決定性有限オートマトン → 非決定性有限オートマトン