

オートマトンと言語

13回目 7月04日(水)

4章 プッシュダウンオートマトン, チューリング機械

授業資料

<http://ir.cs.yamanashi.ac.jp/~ysuzuki/public/automaton/>

授業の予定(中間試験まで)

回数	月日	内容
1	4月11日	オートマトンとは, オリエンテーション
2	4月18日	2章(数式の記法, スタック, BNF)
3	4月25日	2章(BNF), 3章(グラフ)
4	5月02日	3章(グラフ)
5	5月09日	4章 有限オートマトン1
6	5月16日	有限オートマトン2 2・3章の小テスト
7	5月23日	正規表現
8	5月30日	正規表現, 非決定性有限オートマトン
9	6月06日	中間試験, 前半のまとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります。

授業の予定

回数	月日	内容
10	6月13日	NFA→DFA
11	6月20日	DFAの最小化
12	6月27日	DFAの最小化, 有限オートマトンの応用
▶ 13	7月04日	プッシュダウンオートマトン, チューリング機械
14	7月11日	形式言語理論, 文脈自由文法
15	7月18日	期末試験, まとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります。

山梨大学

プログラミングコンペティション

- <http://www.cs.yamanashi.ac.jp/progcomp11/>
- 部門:
 - 初級者部門(KM1・2年生)
 - 一般部門
- スケジュール:
 - 06月15日 課題発表(既に発表済み)
 - ▶ 07月15日 応募締め切り
 - 10月21日 解答締め切り
 - 11月07日 成績発表
 - 11月16日 表彰式(優秀者には豪華(!?)な副賞も)

今日のメニュー

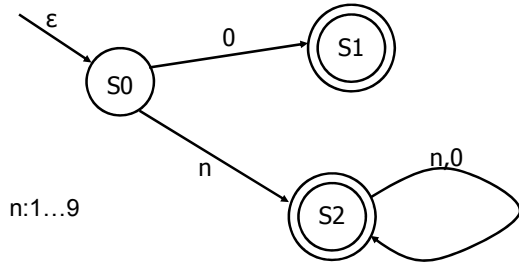
- 有限オートマトンの応用
- プッシュダウンオートマトン(PDA)
- チューリング機械

4.4.6 有限オートマトンの応用

- 普段お世話になっているコンパイラはどんな作業をしているのだろうか。

例題4.63

入力された記号列が0または正の整数値かどうかを判断するFAを構成せよ



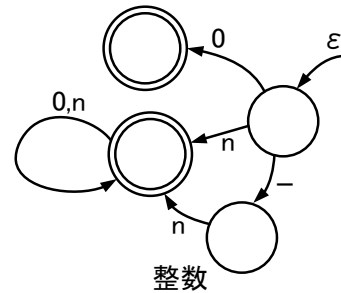
n:1...9

7

例題4.64

整数値かどうか

○: 0, 1003, -20
×: 02, -0



n:1...9

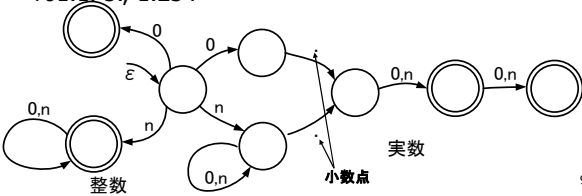
整数

8

例題4.65

$\Sigma = \{0, n, .\}$ 上の語について、入力された語が整数あるいは小数点2桁以内の非負の実数値の表現となっているかどうかを判断するFAを構成せよ。nは1~9の数字を表す。

○: 0.11, 123.1, 1.0
×: 01.1, 5., 1.234



実数

整数

小数点

9

練習問題1 例題4.66

$\Sigma = \{0, n, ., -\}$ 上の語について、入力された語が整数あるいは実数の表現となっているかどうかを判断するFAを構成せよ。nは1~9の数字を表す。

○: 51, 0.11, 123.1, 1.0, -0.9, -10.30, -1.3333333
×: 01.1, 5., -01.2, -.2

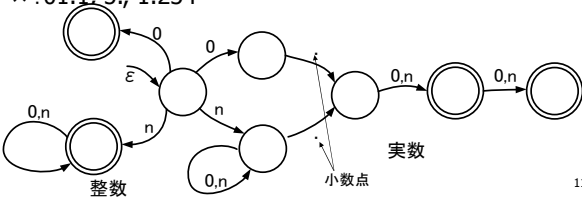
10

例題4.66の手がかり

例題4.65

$\Sigma = \{0, n, .\}$ 上の語について、入力された語が整数あるいは小数点2桁以内の非負の実数値の表現となっているかどうかを判断するFAを構成せよ。nは1~9の数字を表す。

○: 0.11, 123.1, 1.0
×: 01.1, 5., 1.234



整数

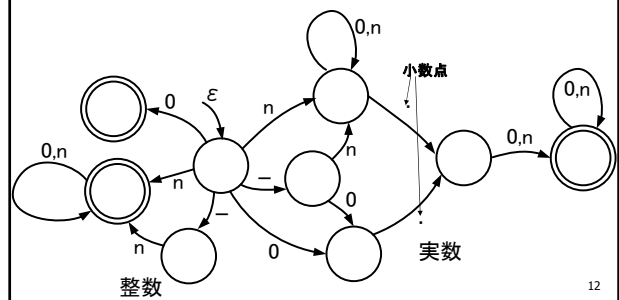
小数点

実数

11

練習問題1 例題4.66の答え

先週はここまで



整数

実数

12

練習問題2 例題4.67 FORTRAN, C言語の変数名

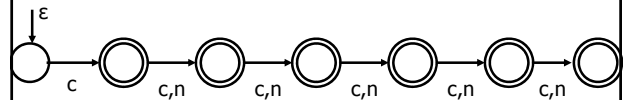
FORTRANの変数名
英字から始まる6文字以内の英数字列

C言語の変数名
英字から始まる任意長の英数字列

13

練習問題2 例題4.67の答え FORTRAN

英字から始まる6文字以内の英数字

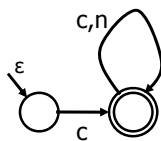


c: 任意の英字
n: 任意の数字

14

練習問題2 例題4.67の答え C言語

英字から始まる任意長の英数字



c: 任意の英字
n: 任意の数字

15

4.5 プッシュダウンオートマトンと チューリング機械

- 4.5.1 プッシュダウンオートマトン
- 4.5.2 チューリング機械
- 4.5.3 オートマトンと計算理論

16

4.5.1 プッシュダウンオートマトン

- 有限オートマトン
= 内部記憶 (状態を記憶する) しか持たない
- プッシュダウンオートマトン
= 有限オートマトン + プッシュダウンテープ
プッシュダウンテープ: 外部記憶 (スタック)

17

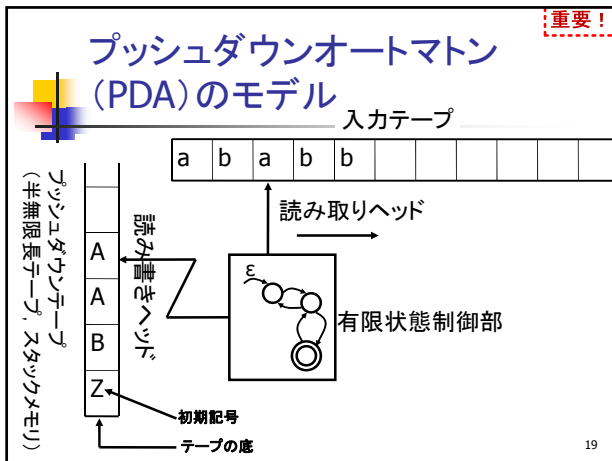
有限オートマトンで受理できない言語

重要!

- $\langle S \rangle ::= 0 \langle S \rangle 0 \mid 1$
 - Sの例: 010, 00100, 0001000
- () を含む式を受理するFAは非常に複雑
 - 例: $((y+z)*2)/3$
- 正規表現では記述することが難しい
- これらの言語はプッシュダウンオートマトンなら受理可能

左の0と右の0の数を
一致させなければならない
→ 0の数を記憶する必要

18



- ## PDAの受理状態
- 空スタック受理のPDA
 - 入力語を読み終わった後, PDテープが空であればその語を受理する
 - 最終状態受理のPDA
 - 入力語を読み終わった後, 最終状態にあればその語を受理する
- 20

PDAの定義

PDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, Z)$

Q	内部状態の集合
Σ	入力テープ記号の集合 (アルファベット)
Γ	プッシュダウン記号の集合
δ	状態遷移関数 $\delta: Q \times (\Sigma + \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow p(Q \times \Gamma^*)$ (非決定性状態遷移関数)
S	初期状態 $S \in Q$
Z	初期プッシュダウン記号 $Z \in \Gamma$

21

PDA テープ読み書きヘッドの基本動作

追加	ポップした後, 同じ文字をプッシュし, さらに1つ以上の文字列をプッシュする
消去	ポップ
書き換え	ポップし後に異なった文字をプッシュする
不動	ポップした後同じ文字をプッシュする

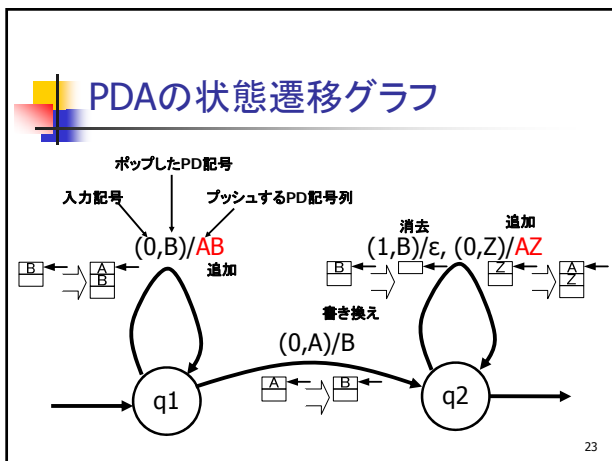
ポップ

プッシュ

1文字読み込んで取り除いた後でヘッ드의位置を一つ下げる

今のヘッドの位置より一つ上にヘッドを上げて1文字書き込む

22



例題4.68 表4.6 非決定性PDA

$Q=\{q_0, q_1\}, \Sigma=\{a, b\}, \Gamma=\{Z, A\}$, 初期状態= q_0 , 初期PD記号= Z

PDA1 δ	a	b
(q_0, Z)	$\{(q_0, AZ), (q_1, Z)\}$	---
(q_0, A)	$\{(q_0, AA), (q_1, A)\}$	---
(q_1, Z)	---	$\{(q_1, \epsilon)\}$
(q_1, A)	---	$\{(q_1, \epsilon)\}$

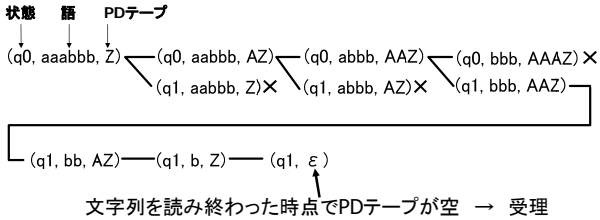
w=aaabbbb

24

例題4.68 表4.6 答え

w=aaabbb

PDA1 δ	a	b
(q0,Z)	{{(q0,AZ),(q1,Z)}	---
(q0,A)	{{(q0,AA),(q1,A)}	---
(q1,Z)	---	{{(q1, ϵ)}
(q1,A)	---	{{(q1, ϵ)}



練習問題1

例題4.68 表4.7 決定性PDA

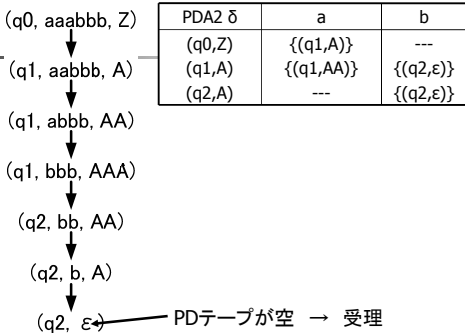
$Q=\{q_0,q_1\}$, $\Sigma=\{a,b\}$, $\Gamma=\{Z,A\}$, 初期状態= q_0 , 初期PD記号= Z

PDA2 δ	a	b
(q0,Z)	{{(q1,A)}	---
(q1,A)	{{(q1,AA)}	{{(q2, ϵ)}
(q2,A)	---	{{(q2, ϵ)}

w=aaabbb

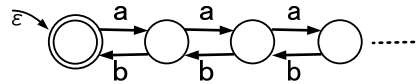
練習問題1 例題4.68 表4.7 答え

w=aaabbb



PDAと $a^n b^n$

- $a^n b^n$ (n は任意の整数) はFAでは受理できないがPDAでは受理可能
- PDテープがaの出現回数とbの出現回数の差を記憶している
- aを「(」, bを「)」と考えると中置記法の括弧の釣り合いをとることに利用可能

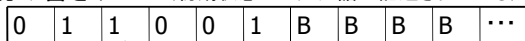


4.5.2 チューリング機械

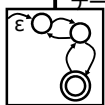
重要!

- 言語受理能力が最も高いオートマトン
- 半無限長の読み書きが自由にできるテープを用いた有限状態機械

読み書きテープ (初期状態では入力語が記述されている)



読み書きヘッド (初期状態: 左端 語の先頭文字位置
テープ上を左右に移動, read, rewrite)



有限状態制御部

最終状態に遷移すると停止して入力語を受理する

チューリング機械(TM)の定義

TM $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, B, F)$

- Q : 内部状態の集合
- Σ : 入力アルファベット B を含まない
- Γ : テープ記号の集合 ($\Gamma \supset \Sigma$)
- B : 空白記号 Γ の要素であるが Σ の要素ではない
- δ : 状態遷移関数 $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, S, L\}$
- R : ヘッドを右に移動, S : ヘッドを移動させない,
- L : ヘッドを左に移動
- S : 初期状態 $S \in Q$
- F : 最終状態(受理状態)の集合 $F \subset Q$

例題4.71 $w_1=0101$

$Q=\{q_0, q_1, q_f\}$, $\Sigma=\{0,1\}$, $\Gamma=\{0,1,b\}$, $S=q_0$, $B=b$, $F=\{q_f\}$

状態 q_0 に遷移し、読み書きテープのヘッドの位置にある文字を**b**に置き換え、ヘッドを右にシフトする

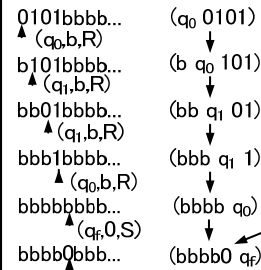
δ	0	1	b
q_0	(q_0, b, R)	(q_1, b, R)	$(q_f, 0, S)$
q_1	(q_1, b, R)	(q_0, b, R)	$(q_f, 1, S)$
q_f	---	---	---

31

例題4.71 答え

$w_1=0101$

時点表示(計算状況)



δ	0	1	b
q_0	(q_0, b, R)	(q_1, b, R)	$(q_f, 0, S)$
q_1	(q_1, b, R)	(q_0, b, R)	$(q_f, 1, S)$
q_f	---	---	---

w : 1が奇数個 \rightarrow 1を出力
 w : 1が偶数個 \rightarrow 0を出力

最終状態 q_f に遷移 $\rightarrow w_1$ を受理

32

練習問題2

例題4.71 $w_2'=011010$

$Q=\{q_0, q_1, q_f\}$, $\Sigma=\{0,1\}$, $\Gamma=\{0,1,b\}$, $S=q_0$, $B=b$, $F=\{q_f\}$

δ	0	1	b
q_0	(q_0, b, R)	(q_1, b, R)	$(q_f, 0, S)$
q_1	(q_1, b, R)	(q_0, b, R)	$(q_f, 1, S)$
q_f	---	---	---

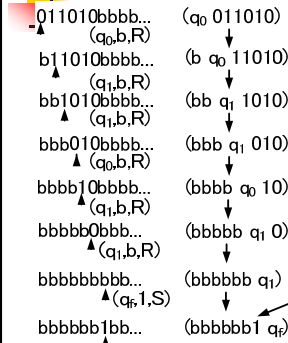
33

練習問題2 例題4.71 答え

ここまで

時点表示(計算状況)

$W_2'=011010$



w : 1が奇数個 \rightarrow 1を出力
 w : 1が偶数個 \rightarrow 0を出力

最終状態 q_f に遷移 $\rightarrow w_2$ を受理

34

練習問題3

例題4.71 $w_2=01101$

宿題

$Q=\{q_0, q_1, q_f\}$, $\Sigma=\{0,1\}$, $\Gamma=\{0,1,b\}$, $S=q_0$, $B=b$, $F=\{q_f\}$

δ	0	1	b
q_0	(q_0, b, R)	(q_1, b, R)	$(q_f, 0, S)$
q_1	(q_1, b, R)	(q_0, b, R)	$(q_f, 1, S)$
q_f	---	---	---

35

練習問題3

例題4.71 答え

$w_2=01101$

w : 1が奇数個 \rightarrow 1を出力
 w : 1が偶数個 \rightarrow 0を出力

最終状態 \rightarrow 受理 ($bbbb1 q_f$)

36

4.5.3 オートマトンと計算理論

オートマトンの受理する言語クラス

オートマトン	受理言語型	言語クラス
チューリング機械	第0型言語	句構造言語(PSL)
線形拘束チューリング機械	第1型言語	文脈依存言語(CSL)
プッシュダウンオートマトン	第2型言語	文脈自由言語(CFL)
有限オートマトン	第3型言語	正規言語(RL)

RL ⊂ CFL ⊂ CSL ⊂ PSL (チョムスキーの言語階層)

万能チューリングマシン

- 任意のTMIについて、その動作表を与えられるとあたかもそのTMのように振る舞うTM
- コンピュータ
 - プログラム=動作表(状態遷移関数表)
 - 入力=入力語
 - コンピュータは万能TM
- チューリングテスト
 - TM M が人間
 - コンピュータ(TM)がTM M を完全に模倣できるか

38

今日のまとめ

- プッシュダウンオートマトン(PDA)
 - モデル
 - 時点表示の推移
 - 受理する言語
- チューリング機械
 - モデル
 - 計算状況の推移