微分積分学 II　期末試験問題 (２０２２年 ２月)

氏名

学籍番号

1.　$x(s,t) = s^2 - st$, $y(s,t) = st + t$ のヤコビアン $J(s,t) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ を求めよ.（５点）

2.　2 重積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2 \leqq y \leqq 1\}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　xy 平面上の領域 D を図示せよ.（４点）

(2)　I を 2 通りの累次積分で表せ.（８点）

3.　2 変数関数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値があれば極値を与える点の座標と極大値および極小値を求めよ.（１０点）

4.　次の累次積分および2重積分の値を求めよ．(各6点)

(1)　$\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^3 (xy - y^2)\, dx \right) dy$

(2)　$\displaystyle\iint_D \frac{x}{y^2}\, dxdy,\ D = \{(x, y) \mid 1 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$

(3)　$\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+3)^2}\, dxdy,\ D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x - 1 \leqq y \leqq -x + 1\}$

5.　累次積分 $\displaystyle I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y)\, dy \right) dx$ について次の問いに答えよ．

(1)　xy 平面上の領域 D を定めて図示し，累次積分 I を D 上の2重積分として表せ．（4点）

(2)　累次積分 I の積分順序を交換せよ．(6点)

6.　次の２重積分の値を変数変換を用いて求めよ.（１０点）

$$\iint_D x\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid -1 \leqq x+y \leqq 2,\ 0 \leqq x-y \leqq 3\}$$

7.　次の２重積分の値を変数変換を用いて求めよ.（１０点）

$$\iint_D \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqq 4,\ y \geqq 0,\ y \geqq -x\}$$

8.　次の各問において，下線に当てはまる数式を答えよ.（各３点，計１２点）

(1)　２つの回転放物面 $z = x^2 + y^2$，$z = 2x^2 + 2y^2 - 4$ で囲まれる部分の体積 V は次の 2 重積分で表される.

$$V = \iint_D \underline{\hspace{10em}}\, dxdy, \qquad D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \underline{\hspace{8em}} \right\}$$

(2)　放物柱面 $z = 1 - y^2$ が楕円柱面 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ によって切り取られる部分の表面積 S は次の 2 重積分によって表される.

$$S = \iint_D \underline{\hspace{10em}}\, dxdy, \qquad D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \underline{\hspace{8em}} \right\}$$

9.　条件 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで関数 $f(x, y) = 3x^2 + 2y$ の最大値と最小値を求める．以下の下線に当てはまる数式または数値を答えよ.

（（１）６点（２）７点）

(1)　$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで $f(x, y)$ の条件付き極値を与える点を (a, b) とする．このとき $(\varphi_x(a, b), \varphi_y(a, b)) \neq (0, 0)$ であるから, ラグランジュの未定乗数法より a, b および未定乗数 λ に対して次の 3 式が成り立つ.

① ______________________

② ______________________

③ ______________________

(2)　(1) を用いて最大値と最小値を求めよ.（ただし, 最大値と最小値の存在については言及しなくて良い.）

最大値：______________　　　最小値：______________

計算過程（採点対象）