微分積分学 II　期末試験問題 (２０２３年 ２月)

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. $x(s,t) = se^t$, $y(s,t) = s^2 + 2t$ のヤコビアン $J(s,t) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ を求めよ. (5 点)

2. 2 重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y+3)^2}\,dx\,dy$, $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, x-y \leqq 2,\ x+y \leqq 2,\ x \geqq 0\right\}$ について，以下の問に答えよ.

   (1)　領域 D を図示せよ．また，I を累次積分で表わせ（1 通りでよい）. (5 点)

   (2)　I の値を求めよ. (6 点)

3. 関数 $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 2y$ の極値があれば極値を与える点の座標と極大値および極小値を求めよ. (10 点)

4. 次の累次積分および 2 重積分の値を求めよ.（各 6 点）

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\cos y} y \, dx \right\} dy$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x+y} \, dx \, dy, \ D = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq x \leqq 1 \, , \, x \leqq y \leqq 2x\}$

(3) $\displaystyle\iint_D xy \, dx \, dy, \ D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{4} \leqq y \leqq x \right\}$

5. 累次積分 $I = \displaystyle\int_1^e \left\{ \int_0^{\log y} f(x, y) \, dx \right\} dy$ について，以下の問に答えよ.

(1) $I = \displaystyle\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ が成り立つように積分領域 D を定めて図示し，累次積分 I を 2 重積分で表わせ.（6 点）

(2) 累次積分 I の積分順序を交換せよ.（4 点）

6. 条件 $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで関数 $f(x,y) = x^3 + y^3$ の条件付き極値を与える候補点を求めよ.（$\varphi(x,y) = 0$ の特異点が存在しないことは認めて良い.）（10 点）

7. 次の 2 重積分について，適切な変数変換を行い I の値を求めよ.（12 点）

$$I = \iint_D x\,dx\,dy,\ D = \left\{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2\,,\ y \leqq x\right\}$$

8. 次の各問において，下線に当てはまる数式を答えよ．（各 3 点，計 12 点）

(1) $z \geqq 0$ において，球面 $x^2+y^2+z^2=4$ と放物面 $z=x^2+y^2$ で囲まれる部分の体積 V は，次の 2 重積分で表される．

$$V=\iint_D \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \, dx\,dy, \qquad D=\left\{ (x,y) \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq \underline{\qquad\qquad} \right\}$$

(2) 放物面 $z=x^2+y^2$ の円柱面 $x^2+y^2=2$ の内部にある部分の面積 S は，次の 2 重積分で表される．

$$S=\iint_D \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \, dx\,dy, \qquad D=\left\{ (x,y) \,\middle|\, \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \right\}$$

9. 次の 2 重積分について，適切な変数変換を行い I の値を求めよ．(12 点)

$$I=\iint_D (x+2y)\,dx\,dy,\ D=\{(x,y)\,|\,0 \leqq 2x-y \leqq 2\,,\ 0 \leqq x-2y \leqq 3\}$$