

学籍番号 _____ 氏名 _____

☐ 1. 次の 2 重積分と累次積分を求めよ. (各 5 点)

(1) $\int_2^4 \left(\int_0^1 (2x - y) dx \right) dy$

答

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_x^{2x} \sin(2x + y) dy \right) dx$

答

(3) $\iint_D xy^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 3\}$

答

☐ 2. 次の累次積分の積分順序を交換せよ. (5 点)

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x+1} f(x, y) dy \right) dx$$

答

3. 次の2重積分について、以下の問いに答えよ.

$$I = \iint_D 2 \cos(x^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{\pi} \text{ かつ } y \leq x \leq \sqrt{\pi}\}$$

(1) 積分領域 D を xy 平面上に図示せよ. また, I を2通りの累次積分で表せ. (15 点)

(2) I を求めよ. (5 点)

答

4. 次の問いに答えよ.

(1) $x(u, v) = \frac{1}{3}(u + 2v)$, $y(u, v) = \frac{1}{3}(u - v)$ のヤコビアン (ヤコビ行列の行列式) を求めよ. (5 点)

答

(2) 適切な変数変換を行い、次の2重積分を求めよ. (10 点)

$$I = \iint_D (2x + y) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid -1 \leq x + 2y \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq x - y \leq 2\}$$

答

5. xyz 空間内の円柱面 $x^2 + y^2 = 1$, 平面 $z = x + 1$ および xy 平面で囲まれた立体の体積 V を 2 重積分で表すとき, 積分領域 D と 2 重積分 V の式を求めよ. (10 点)

答

$$V = \iint_D (\hspace{10em}) \, dxdy, \quad D = \{ (x, y) \mid \hspace{10em} \}$$

6. 回転放物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ の $z \leq 1$ の部分にある曲面の表面積を S とする. 次の問いに答えよ.

(1) 積分領域 D と 2 重積分 S の式を求めよ. (10 点)

答

$$S = \iint_D (\hspace{10em}) \, dxdy, \quad D = \{ (x, y) \mid \hspace{10em} \}$$

(2) 適切な変数変換を行い, S を求めよ. (5 点)

答

7. $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + y^2x - 10x$ について, 次の問いに答えよ. (各 5 点)

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ.

答

(2) 極値が存在するならば, 極値を与える点と極値を求めよ.

答

(3) 条件 $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 = 0 \cdots (*)$ のもとで $f(x,y)$ の極値を与える点を (a,b) とする. このとき未定乗数 λ と a, b に対し成り立つ連立方程式を求めよ (ラグランジュの未定乗数法). ただし $(\varphi_x(a,b), \varphi_y(a,b)) \neq (0,0)$ は既知としてよい.

答

(4) (3) の条件 $(*)$ のもとで $f(x,y)$ は最大値および最小値をもつことが分かっている. $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ.

答