微分積分学 II　中間試験問題 (２０２１年 １２月)

氏名

学籍番号

1.　次の極限値が存在するか調べ，存在する場合は極限値を求めよ. (各５点)

(1)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$

(2)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

2.　次の関数 $f(x,y)$ が原点において連続であるか否かを判断し，理由と共に答えよ. (６点)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x^2+3y^2)}{2x^2+3y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

3.　次の関数 $f(x,y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ.（各４点）

(1)　$f(x,y) = x^2y + x\log y$　　　$f_x(x,y) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)　$f(x,y) = \sin(2x-y)$　　　$f_x(x,y) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(3)　$f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+xy}$　　　$f_x(x,y) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

(4)　$f(x,y) = x^2e^{xy}$　　　$f_x(x,y) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

4.　関数 $f(x,y)$ は $f_x(x,y) = 2x+y$ および $f_y(x,y) = x-2y$ を満たすとする．次の問いに答えよ.（各６点）

(1)　$f(x,y)$ と $x(t) = t^2+1,\ y(t) = 2t$ の合成関数 $z(t) = f(x(t),y(t))$ の導関数 $z'(t)$ を求めよ.

(2)　$f(x,y)$ と $x(s,t) = s^2+t^2,\ y(s,t) = s^2-t^2$ の合成関数 $z(s,t) = f(x(s,t),y(s,t))$ の偏導関数 $z_t(s,t)$ を求めよ.

問３の計算スペース（採点対象にはなりません）

5.　$f(x,y)=e^x\cos y$ の全微分 df を求めよ.（５点）

6.　次の関数 $f(x,y)$ のマクローリン展開を指定の項まで求めよ．ただし，剰余項は求めなくてよい.（（１）８点（２）７点）

(1)　$f(x,y)=\log(1-x+2y)$　　(2 次まで)

(2)　$f(x,y)=\sin x\cos y$　　(3 次まで)

7.　関数 $f(x,y)=e^{2x}\tan y$ について，次の問いに答えよ.

(1)　$f_{xxxy}(x,y)$ を求めよ.（５点）

(2)　$f(x,y)$ のマクローリン展開における x^3y の係数を求めよ.（４点）

8. 曲面 $z = f(x,y) = 2\sqrt{x^2 - y}$ 上の点 $P(1, 0, f(1,0))$ における接平面の方程式，および yz 平面と平行な接線の方程式を求めよ.（１０点）

9. $f(x,y) = y^3 - 2y^2 - xy + 2x$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y) = 0$ で定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在するとき，$\varphi(x)$ の導関数 $\varphi'(x)$ を x, y を用いて表せ.（６点）

(2) 点 $(1, -1)$ は曲線 $C : f(x,y) = 0$ 上の点である．陰関数定理を用いて，$x = 1$ のまわりで定義される微分可能な陰関数 $y = \varphi(x)$ で $-1 = \varphi(1)$ を満たすものが存在することを説明せよ．また，点 $(1, -1)$ における C の接線の傾きを求めよ.（６点）

(3) 曲線 $f(x,y) = 0$ 上の特異点を求めよ.（５点）