微分積分学 II　中間試験問題 (2023 年 11 月)

氏名

学籍番号

1.　次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ を求めよ.（各 4 点）

(1)　$f(x,y) = x^y\,(x > 0)$

(2)　$f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+xy}$

(3)　$f(x,y) = \sqrt{x^2 + e^y}$

2.　$f(x,y) = \tan x \cos y,\ \ x(t) = t^2,\ \ y(t) = 2t$ とする．合成関数の微分法を用いて, $z(t) = f(x(t), y(t))$ の導関数 $z'(t)$ を求めよ.（5 点）

3.　$f(x,y) = xy,\ \ x(s,t) = s^2 - t^2,\ \ y(s,t) = e^{t-s}$ とする．合成関数の微分法を用いて, $z(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ の t に関する偏導関数 $z_t(s,t)$ を求めよ.（5 点）

4.　関数 $f(x,y)=x^2+2xy^2$ 上の点 $\mathrm{P}\,(2,1,f\,(2,1))$ について以下の問いに答えよ．
（(1)4 点 (2)2+2 点 (3)4 点 (4)4 点）

(1)　$f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2)　点 $(2,1)$ における $f(x,y)$ の偏微分係数を求めよ．

(3)　点 P における接平面の方程式を求めよ．

(4)　点 P における yz 平面と平行な接線の方程式を求めよ．

5.　次の極限値が存在するかどうかを調べ，存在する場合は極限値を求めよ．(各５点)

(1)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^4+y^4}$

(2)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

6.　関数 $f(x,y) = \log(e^x + y)$ について次の問いに答えよ．((1)8 点 (2)6 点 (3)6 点)

(1)　$f(x,y)$ の 2 次までの偏導関数をすべて求めよ．

(2)　$f(x,y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．ただし，剰余項は不要とする．

(3)　$f(x,y)$ の $(0,1)$ におけるテイラー展開を 2 次の項まで求めよ．ただし，剰余項は不要とする．

7.　$f(x,y) = \log(1 - x + 2y)$ のマクローリン展開を 3 次の項まで求めよ．ただし，剰余項は不要とする．(6 点)

8. $f(x,y)=2x^2+y^3-3xy$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点 $(1,-2)$ に関する次の文章中の（ア）から（オ）に当てはまる数式を入れよ．(順に 4 点， 2 点， 1 点， 1 点， 4 点， 2 点)

曲線 $f(x,y)=0$ 上の点 $(1,-2)$ における接線の傾きを求める．点 $(1,-2)$ は条件 $\boxed{\text{（ア）}}$ をみたすので，陰関数定理より $x=1$ を含む開区間で定義された $f(x,y)=0$ から定まる微分可能な陰関数 $y=\varphi(x)$ で $\boxed{\text{（イ）}}$ をみたすものがただ 1 つ存在する． $f_x(x,y)=\boxed{\text{（ウ）}}$ $f_y(x,y)=\boxed{\text{（エ）}}$ なので，この $y=\varphi(x)$ の 導関数を x と y を用いて表すと $\varphi'(x)=\boxed{\text{（オ）}}$ である．したがって，求めたい接線の傾きは $\boxed{\text{（カ）}}$ である．

（ア）__________ （イ）__________

（ウ）__________ （エ）__________

（オ）__________ （カ）__________

(2) 曲線 $f(x,y)=0$ の特異点を求めよ．(6 点)

9. 次の関数 $f(x,y)$ が原点において連続であるかどうかを判断し，理由と共に答えよ．(6 点)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2xy)}{xy} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 2 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$