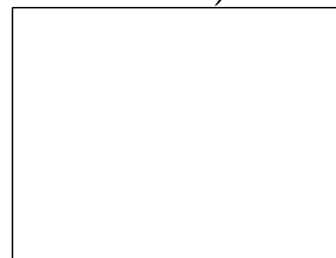


線形代数学I 期末試験問題(2023年7月)

氏名

学籍番号



1. 次の行列式の値を求めよ. ((1) (2) 4点 (3) (4) (5) 5点)



$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 5 & 10 & 7 \\ 4 & 10 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. 4次正方行列 A と B の行列式をそれぞれ3と5とする (すなわち $\det A = 3, \det B = 5$). このとき $\det({}^tAB)$ と $\det(3A^{-1}B)$ のそれぞれの値を求めよ (答えのみで良い). (各3点)

3. 原点を $O(0, 0, 0)$ とする xyz 座標空間において, 点 $A(-2, 1, 3)$, $B(2, 2, -1)$, $C(4, 1, 2)$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ. (各5点)

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ によって張られる平行四辺形の面積 S を求めよ.

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ によって張られる平行六面体の体積 V を求めよ.

(4) 3点 O, A, B を含む平面 H を表す方程式を求めよ.

(5) (4) の平面 H に直交し, 点 B を通る直線 ℓ を表す方程式を求めよ.

4. ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積が $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + 5\mathbf{b})$ を求めよ. (5 点)

5. a, b, c を定数とし, A を 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) A の行列式の値を求めよ. ただし, 因数分解した形で表すこと. (4 点)

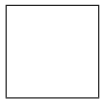
- (2) A が正則であるための必要十分条件を a, b, c に関する条件で述べよ. (4 点)

- (3) 次の連立方程式の解がただ 1 つであることを示し, y の値をクラメルの公式を用いて求めよ (クラメルの公式を用いたことが分かるように記述すること). (6 点)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 2 \\ x + 9y + 25z = 0 \end{cases}$$

6. n 次正方行列 A が $A^4 = O_n$ をみたしているとする. このとき A が正則となることがあるか否か理由とともに述べよ. (5 点)

7. A を 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.



(1) A の $(1, 1)$ 余因子 Δ_{11} を計算せよ. (2 点)

(2) A の $(1, 2)$ 余因子 Δ_{12} を計算せよ. (2 点)

(3) A の $(1, 3)$ 余因子 Δ_{13} を計算せよ. (2 点)

(4) 1 行目に関する余因子展開を用いて, A の行列式の値を求めよ. ただし, どのように余因子展開を行ったのか分かるように記述すること. (4 点)

(5) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を計算せよ. (6 点)

(6) A が正則であるか否かを理由とともに述べよ. A が正則であるならば, A の逆行列を A の余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて求めよ. (6 点)