

線形代数学I ABCクラス 期末試験問題 (2024年7月)

氏名

学籍番号

1. 次の行列式の値を求めよ. ((1) (2) 4点 (3) (4) (5) 5点)

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

2. 2次正方行列 A と B について, 行列式の値をそれぞれ 4 と 3 とする (すなわち $\det A = 4$, $\det B = 3$). このとき $\det(5A)$ と $\det({}^tAB)$ (tA は A の転置) のそれぞれの値を求めよ (答えのみで良い). (各 3 点)

3. 原点を $O(0, 0, 0)$ とする座標空間において, 点 $A(1, -2, 1)$, $B(3, 2, 0)$, $C(3, 4, 5)$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ. (各 5 点)

- (1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を求めよ.

- (2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の張る平行四辺形の面積 S を求めよ.

- (3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の張る平行六面体の体積 V を求めよ.

- (4) 3 点 O , A , B を通る平面 H の方程式を求めよ.

- (5) (4) の平面 H に直交し, 点 A を通る直線 ℓ の方程式を求めよ.

4. A を 3 次正方行列とし $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ とする ($\mathbf{a}_i$ は A の第 i 列). また $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2$ とし, 3 次正方行列 B を $B = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_3]$ で定める (B は A の第 2 列を $\mathbf{b}$ で置き換えた行列). $\det A = 23$, $\det B = 7$ のとき β の値を求めよ. (5 点)



5. a を定数とする. 以下の連立 1 次方程式 (*) について, 次の問いに答えよ.

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = 8 \end{cases}$$

- (1) 方程式 (*) の係数行列を A とするとき, A の行列式の値を求めよ. (4 点)



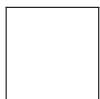
- (2) 方程式 (*) の解がただ一つとなる必要十分条件を, a を用いて述べよ. (4 点)

- (3) $a = 4$ のとき, 方程式 (*) をみたす x_3 の値をクラメル (クラメル) の公式を用いて求めよ. ただし, クラメルの公式を用いたことが分かるように記述すること. (6 点)

6. n 次正方行列 A と B が $\det(AB) = 0$ をみたしているとする. このとき A と B の両方が正則となることがあるか否か理由とともに述べよ. (5 点)



7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.



- (1) 第1列に関する余因子展開を用いて, A の行列式の値を求めよ. ただし, どのように余因子展開を行ったのか分かるように記述すること. (6点)

- (2) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を計算せよ. (6点)

- (3) (2) の計算にもとづいて, $A\tilde{A}$ を計算せよ. (4点)

- (4) $\tilde{A}$ を用いて, A の逆行列を求めよ. (6点)