# 線形代数学Ｉ ABC クラス期末試験問題 (２０２５年７月)

氏名

学籍番号

1.　次の行列式の値を求めよ.（(１)（２）４点（３)（４)（５）５点)

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 100 & 4 & 3 \\ 100 & 8 & 6 \\ 100 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 13 \\ 5 & 1 & 8 & 18 \end{vmatrix}$

2. 2次正方行列 $A$ と $B$ について, 行列式の値をそれぞれ 7 と 2 とする (すなわち $\det A = 7$, $\det B = 2$). このとき $\det(10A)$ と $\det({}^tAB^3)$ (${}^tA$ は $A$ の転置) のそれぞれの値を求めよ (答えのみで良い). (各3点)

3. 原点を $\mathrm{O}(0,0,0)$ とする座標空間において, 点 $\mathrm{A}(1,1,-3)$, $\mathrm{B}(2,0,3)$, $\mathrm{C}(1,-1,-6)$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ. (各5点)

(1) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の張る平行六面体の体積 $V$ を求めよ.

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の張る平行四辺形の面積 $S$ を求めよ.

(4) 3点 O, A, B を通る平面 $H$ の方程式を求めよ.

(5) (4) の平面 $H$ に直交し, 点 B を通る直線 $\ell$ の方程式を求めよ.

4. $A$ を 3 次正方行列とし $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ とする ($\boldsymbol{a}_i$ は $A$ の第 $i$ 列). また $\boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{a}_1 + 11\boldsymbol{a}_2$ とし, 3 次正方行列 $B$ を $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ で定める ($B$ は $A$ の第 1 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列). $\det A = -4$ のとき $\det B$ の値を求めよ. ( 5 点)

5. $a$ を定数とする. 以下の連立 1 次方程式 $(*)$ について, 次の問いに答えよ.

$$(*) \begin{cases} x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

(1) 方程式 $(*)$ の係数行列を $A$ とするとき, $A$ の行列式の値を求めよ. ( 5 点)

(2) 方程式 $(*)$ の解がただ一つとなる必要十分条件を, $a$ を用いて述べよ. ( 6 点)

(3) $a = 10$ のとき, 方程式 $(*)$ をみたす $x_2$ の値をクラーメル (クラメル) の公式を用いて求めよ. ただし, クラーメルの公式を用いたことが分かるように記述すること. ( 6 点)

6. 4 次正方行列 $A$ が $\det(A^2) = 0$ をみたしているとする. このとき $A$ が正則となることがあるか否か理由とともに述べよ. ( 6 点)

7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ. (各 6 点)

(1) 第 2 列に関する余因子展開を用いて, $A$ の行列式の値を求めよ. ただし, どのように余因子展開を行ったのか分かるように記述すること.

(2) $A$ の余因子行列 $\widetilde{A}$ を計算せよ.

(3) $\widetilde{A}$ を用いて, $A$ の逆行列を求めよ.