

線形代数学I ABCクラス期末試験問題 (2025年7月)

氏名

学籍番号

1. 次の行列式の値を求めよ. ((1) (2) 4点 (3) (4) (5) 5点)

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 100 & 4 & 3 \\ 100 & 8 & 6 \\ 100 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 13 \\ 5 & 1 & 8 & 18 \end{vmatrix}$$

2. 2次正方行列 A と B について、行列式の値をそれぞれ7と2とする (すなわち $\det A = 7$, $\det B = 2$). このとき $\det(10A)$ と $\det({}^tAB^3)$ (tA は A の転置) のそれぞれの値を求めよ (答えのみで良い). (各3点)

3. 原点を $O(0, 0, 0)$ とする座標空間において、点 $A(1, 1, -3)$, $B(2, 0, 3)$, $C(1, -1, -6)$ を考える. このとき、次の問いに答えよ. (各5点)

(1) 外積 $\vec{OA} \times \vec{OB}$ を求めよ.

(2) ベクトル \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} の張る平行六面体の体積 V を求めよ.

(3) ベクトル \vec{OA} と \vec{OB} の張る平行四辺形の面積 S を求めよ.

(4) 3点 O , A , B を通る平面 H の方程式を求めよ.

(5) (4) の平面 H に直交し、点 B を通る直線 l の方程式を求めよ.

4. A を 3 次正方行列とし $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ とする (\mathbf{a}_i は A の第 i 列). また $\mathbf{b} = 6\mathbf{a}_1 + 11\mathbf{a}_2$ とし, 3 次正方行列 B を $B = [\mathbf{b} \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ で定める (B は A の第 1 列を \mathbf{b} で置き換えた行列). $\det A = -4$ のとき $\det B$ の値を求めよ. (5 点)



5. a を定数とする. 以下の連立 1 次方程式 (*) について, 次の問いに答えよ.

$$(*) \begin{cases} x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

- (1) 方程式 (*) の係数行列を A とするとき, A の行列式の値を求めよ. (5 点)



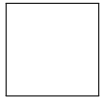
- (2) 方程式 (*) の解がただ一つとなる必要十分条件を, a を用いて述べよ. (6 点)

- (3) $a = 10$ のとき, 方程式 (*) をみたす x_2 の値をクラメル (クラメル) の公式を用いて求めよ. ただし, クラメルの公式を用いたことが分かるように記述すること. (6 点)

6. 4 次正方行列 A が $\det(A^2) = 0$ をみたしているとする. このとき A が正則となることがあるか否か理由とともに述べよ. (6 点)



7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ. (各6点)



(1) 第2列に関する余因子展開を用いて, A の行列式の値を求めよ. ただし, どのように余因子展開を行ったのか分かるように記述すること.

(2) A の余因子行列 \tilde{A} を計算せよ.

(3) \tilde{A} を用いて, A の逆行列を求めよ.