線形代数学 I　中間試験問題 (２０２１ 年 ６ 月)

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1.　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.（(１）各２点（２）２点）

(1)　A に関する次の情報を答えよ.
A の行の個数：＿＿＿.　　A の型：＿＿＿＿.　　A の $(2,3)$ 成分の数値：＿＿＿.

(2)　A の転置行列 ${}^tA$ を求めよ.

2.　A, B, C を２次正方行列とする. また２次単位行列を E_2, ２次正方零行列を O_2 で表す.
次の命題のうち, 一般に成立しないものを全て選べ.（３点）

(1)　$(AB)C \neq A(BC)$ となる A, B, C が存在する.
(2)　$AB = BA$ のとき, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ である.
(3)　$A^2 = 2A - E_2$ のとき $A = E_2$ である.
(4)　${}^t({}^tA\,B) = A\,{}^tB$ である.

＿＿＿＿＿＿＿ は成立しない.

3.　次の計算をせよ.（(１）－（４）各３点,（５）４点）

(1)　$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}^2$

(4)　$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(5)　$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 101 & 202 \\ 213 & 426 \\ 351 & 701 \\ -16 & -32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.　次の連立１次方程式を掃き出し法で解け．解が存在しない場合は解無しと答えよ．

（各７点）

(1)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

(2)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

5.　次の連立１次方程式について, (1)(2)(3) に答えよ.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + kz = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

(1)　係数行列 A および拡大係数行列 B を書け.（２点）

(2)　上の連立１次方程式が解を持たないときの k の値を求めよ.（６点）

(3)　上の連立１次方程式が解を複数持つときの k の値を求めよ. またそのときの整数解を２組求めよ.（６点）

6.　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1)　A の簡約形を求め, 階数を答えよ.（６点）

(2)　A が正則であるかどうかを理由とともに答えよ.（３点）

7.　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1)　A の逆行列 A^{-1} を, 行基本変形を用いて求めよ.（８点）

(2)　(1) で求めた A^{-1} が A の逆行列になっていることを逆行列の定義に従って示せ.（４点）

(3)　(1) の結果を用いて, $AX = B$ となる行列 X を求めよ.（４点）