

線形代数学 I 中間試験問題 (2022 年 6 月)

氏名 _____

学籍番号 _____



1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ((1) 各 1 点 (2) 2 点)

- (1) A に関する次の情報を答えよ.

A の列の個数: _____. A の型: _____. A の $(2, 1)$ 成分の数値: _____.

- (2) A の転置行列 tA を求めよ.

2. A, B を 2 次正方行列とする. また 2 次単位行列を E_2 , 2 次正方零行列を O_2 で表す. 次の命題のうち, 一般に成立しないものを全て選べ. (3 点)

- (1) $AE_2 = E_2A$ である.
 (2) $A \neq O_2$ かつ $AB = O_2$ ならば $B = O_2$ である.
 (3) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ である.
 (4) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ である.

_____ は成立しない.

3. 次の計算をせよ. ((1) - (4) 各 3 点, (5) 4 点)

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^2$

(4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (2 \ -1) + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 次の連立1次方程式を掃き出し法で解け. 解が存在する場合, 解をベクトル表示すること. 解が存在しない場合は解無しと答えよ. (各7点)

(1)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 16 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$$

5. k を実数とする. 次の連立 1 次方程式について, (1)(2)(3) に答えよ.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + (k+4)z = 2 \\ 2x + ky - 2z = 2k+2 \end{cases}$$

- (1) 係数行列 A および拡大係数行列 B を書け. (4 点)

- (2) 問いの連立 1 次方程式が解を持つかどうかを, A, B の階数を用いて調べよ. また, 解を持つときは解の個数について, A の階数を用いて調べよ. (10 点)

6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 4 & -7 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の簡約形を求め, 階数を答えよ. (7 点)

(2) A が正則であるかどうかを理由とともに答えよ. (4 点)

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A は正則である. A の逆行列 A^{-1} を, 行基本変形を用いて求めよ. (8 点)

(2) (1) で求めた A^{-1} が A の逆行列になっていることを逆行列の定義に従って示せ. (4 点)

(3) A の逆行列を用いて連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解け. 答案には, A の逆行列をどのように用いたかの説明も書くこと. (5 点)