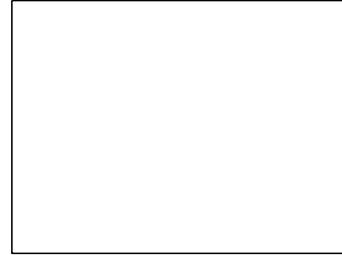


線形代数学 II 期末試験問題 (2022年1月)

氏名 _____

学籍番号 _____



1. 2次元実数ベクトル空間上の線形変換 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ が次の式をみたすとする.

$$f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = -4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

ただし, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は \mathbf{R}^2 の標準基底である. また, \mathbf{R}^2 の基底 $\{\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ から基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ への変換行列 P を求めよ. (5点)
(P は $(\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2)P$ をみたす行列である.)



- (2) 標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ. (答えのみでよい) (5点)

- (3) $(f(\mathbf{u}_1) \ f(\mathbf{u}_2)) = (f(\mathbf{e}_1) \ f(\mathbf{e}_2))P$ であることを示せ. (6点)

- (4) \mathbf{R}^2 の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ. (6点)

2. 2次元実数ベクトル空間上の線形変換 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ がある. \mathbf{R}^2 の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ に関する f の表現行列を求めると $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ であった. この情報をもとに, \mathbf{R}^2 のベクトル $\mathbf{x} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ に対して, $f(\mathbf{x})$ を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の1次結合で表せ. (4点)



3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, ケイリー・ハミルトンの定理を用いて次の問いに答えよ.

(1) A^2 を A と E を用いた式で表せ. (6点)



(2) $A^4 - 2A^3$ を求めよ. (8点)

(3) A^{-1} を A と E を用いた式で表せ. (6点)

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有多項式 $g_A(x)$ を求め, 固有値をすべて求めよ. (6点)

(2) (1) で求めた各固有値に属する固有ベクトルを1つずつ求めよ. (8点)

(3) A の対角化行列 P を構成し, A を対角化せよ. (6点)

(4) n を自然数とすると, A^n の (1,1) 成分と (2,2) 成分を求めよ. (8点)

5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求め、各固有値に対する固有空間の基底を求めよ. (14点)



(2) A の対角化行列 P を構成し、 A を対角化せよ. (6点)

6. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルであることを示せ. (6点)

