線形代数学 II　期末試験問題（２０２２年１月）

氏名

学籍番号

1.　2 次元実数ベクトル空間上の線形変換 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ が次の式をみたすとする.

$$f(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 - 5\boldsymbol{e}_2, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = -4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

ただし, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の標準基底である. また, $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ への変換行列 P を求めよ. （５点）
(P は $(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2)P$ をみたす行列である.)

(2)　標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ. （答えのみでよい）（５点）

(3)　$(f(\boldsymbol{u}_1)\ \ f(\boldsymbol{u}_2)) = (f(\boldsymbol{e}_1)\ \ f(\boldsymbol{e}_2))P$ であることを示せ. （６点）

(4)　$\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ. （６点）

2. 2次元実数ベクトル空間上の線形変換 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ がある．$\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に関する f の表現行列を求めると $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ であった．この情報をもとに，$\mathbf{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$ に対して，$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の1次結合で表せ.（4点）

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，ケイリー・ハミルトンの定理を用いて次の問いに答えよ.

(1) A^2 を A と E を用いた式で表せ.（6点）

(2) $A^4 - 2A^3$ を求めよ.（8点）

(3) A^{-1} を A と E を用いた式で表せ.（6点）

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有多項式 $g_A(x)$ を求め, 固有値をすべて求めよ.（6 点）

(2) (1) で求めた各固有値に属する固有ベクトルを 1 つずつ求めよ.（8 点）

(3) A の対角化行列 P を構成し, A を対角化せよ.（6 点）

(4) n を自然数とするとき, A^n の $(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分を求めよ.（8 点）

5.　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　A の固有値をすべて求め，各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．(１４点)

(2)　A の対角化行列 P を構成し，A を対角化せよ．(６点)

6.　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルであることを示せ．(６点)