

線形代数学 II 期末試験問題 (2023 年 1 月)

氏名 _____

学籍番号 _____



1. 2次元実数ベクトル空間上の線形変換 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ が次の式をみたすとする.

$$f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ただし, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の標準基底である. また, $\mathbf{R}^2$ の基底

$$\{\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) ① より標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ. (6 点)



- (2) ② より基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ から基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ への変換行列 P を求めよ. (5 点)
(P は $(\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2)P$ を満たす 2 次行列である.)

- (3) f が線形写像であることと ② を用いて, $(f(\mathbf{u}_1) \ f(\mathbf{u}_2)) = (f(\mathbf{e}_1) \ f(\mathbf{e}_2))P$ が成り立つことを示せ. (5 点)

- (4) $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ. (6 点)

2. 線形写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ がある.

$\mathbf{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ と $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ に関する f の表現行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ であった.

このとき, $\mathbf{x} = 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$ に対して, $f(\mathbf{x})$ を $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2$ の 1 次結合で表せ. (6 点)

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) A に対し, ケーリー・ハミルトンの定理を適用して得られる等式を書け. (6 点)

(2) (1) を用いて, $A^4 + A^3 + A^2 + A + E$ を求めよ. (8 点)

(3) (1) を用いて, A^{-1} を求めよ. (4 点)

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.



- (1) A の固有値をすべて求めよ. (6 点)

- (2) (1) で求めた各固有値に属する固有ベクトルを 1 つずつ求めよ. (8 点)

- (3) A の対角化行列 P を構成し, A を対角化せよ. (6 点)

- (4) n を自然数とする. (3) を用いて, A^n を求めよ. (8 点)

5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値をすべて求め、各固有値に対する固有空間の基底を求めよ. (14点)

- (2) A の対角化行列 P を構成し、 A を対角化せよ. (6点)

6. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルであるかどうかを調べよ. (6点)