線形代数学 II　期末試験問題（２０２４年 １月）

氏名

学籍番号

1.　2 次元実数ベクトル空間上の線形変換 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ が次の式をみたすとする.

$$f(\boldsymbol{e}_1) = 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2.$$

ただし $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の標準基底である. また $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ とし, $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.（6 点）

(2)　基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ への変換行列 P を求めよ.（5 点）

(3)　$f(\boldsymbol{u}_1)$ と $f(\boldsymbol{u}_2)$ のそれぞれを $f(\boldsymbol{e}_1)$ と $f(\boldsymbol{e}_2)$ の 1 次結合として表せ.
そして $\big(f(\boldsymbol{u}_1) \quad f(\boldsymbol{u}_2)\big) = \big(f(\boldsymbol{e}_1) \quad f(\boldsymbol{e}_2)\big)\, P$ であることを示せ.（5 点）

(4)　$\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.（6 点）

2. 線形変換 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ がある．$\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に関する f の表現行列が $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ であった．このとき，$f(4\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2)$ を $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ の 1 次結合で表せ．（6 点）

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A に対し，ケーリー・ハミルトンの定理を適用して得られる等式を書け．（6 点）

(2) (1) を用いて，A^4 を $cA + dE$ $(c, d \in \mathbf{R})$ という形の式で表せ．（6 点）

(3) (1) を用いて，A^{-1} を $cA + dE$ $(c, d \in \mathbf{R})$ という形の式で表せ．（6 点）

4.　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1)　A の固有値をすべて求めよ.（6 点）

(2)　(1) で求めた各固有値に属する固有ベクトルを 1 つずつ求めよ.（8 点）

(3)　A の対角化行列 P を構成し, A を対角化せよ.（6 点）

(4)　n を自然数とし, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする. $A^n \boldsymbol{w}$ を求めよ.（8 点）

5. 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求め, 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ. （１４点）

(2) (1) で求めた各固有空間の基底が A の固有ベクトルであることを, 固有ベクトルの定義に従って確認せよ（計算のみ書けば良い）.（６点）

(3) A の対角化行列 P を構成し, A を対角化せよ.（６点）