

氏名

学籍番号

1. ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の線形変換 $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ が次の式をみたすとする.

$$T(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \quad T(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2.$$

ただし $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の標準基底である. また $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ とし, $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ. (6 点)

- (2) 基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ から $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ への変換行列 P を求めよ. (5 点)

- (3) $T(\mathbf{u}_1)$ と $T(\mathbf{u}_2)$ のそれぞれを $T(\mathbf{e}_1)$ と $T(\mathbf{e}_2)$ の 1 次結合で表せ.

そして $[T(\mathbf{u}_1) \ T(\mathbf{u}_2)] = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2)] P$ であることを示せ. (5 点)

- (4) 基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ. (6 点)

2. 線形変換 $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ がある. $\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ に関する T の表現行列が $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ であった. このとき, $T(3\mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_2)$ を $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ の 1 次結合で表せ. (6 点)



3. $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) A に対し, ケイリー・ハミルトンの定理を適用して得られる等式を書け. (6 点)



(2) (1) を用いて, A^4 を $cA + dE$ ($c, d \in \mathbf{R}$) という形の式で表せ. (6 点)

(3) (1) を用いて, A^{-1} を $cA + dE$ ($c, d \in \mathbf{R}$) という形の式で表せ. (6 点)

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

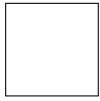
(1) A の固有値をすべて求めよ. (6 点)

(2) (1) で求めた各固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ. (8 点)

(3) A を対角化せよ. (6 点)

(4) n を自然数とする. A^n を求めよ. (8 点)

5. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.



(1) A の固有値をすべて求め, 各固有値について固有空間の基底を求めよ. (14点)

(2) (1) で求めた各固有空間の基底が A の固有ベクトルであることを, 固有ベクトルの定義に従って確認せよ (計算のみ書けば良い). (6点)

(3) A を対角化せよ. (6点)