線形代数学 II　ABC クラス　期末試験問題 （２０２６年 １月）

氏名

学籍番号

1. ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ の線形変換 $T\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ が次の式をみたすとする.

$$T(\boldsymbol{e}_1) = 6\boldsymbol{e}_1 + 8\boldsymbol{e}_2, \quad T(\boldsymbol{e}_2) = -2\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2.$$

ただし $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の標準基底である. また $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$ とし, $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)　基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ.（6 点）

(2)　基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ への変換行列 P を求めよ.（5 点）

(3)　$T(\boldsymbol{u}_1)$ と $T(\boldsymbol{u}_2)$ のそれぞれを $T(\boldsymbol{e}_1)$ と $T(\boldsymbol{e}_2)$ の 1 次結合で表せ.
そして $\begin{bmatrix} T(\boldsymbol{u}_1) & T(\boldsymbol{u}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(\boldsymbol{e}_1) & T(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} P$ であることを示せ.（5 点）

(4)　基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ.（6 点）

2. 線形変換 $T\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ がある．$\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に関する T の表現行列が $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ であった．このとき，$T(3\boldsymbol{u}_1 + 5\boldsymbol{u}_2)$ を $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ の 1 次結合で表せ．（6 点）

3. $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A に対し，ケイリー・ハミルトンの定理を適用して得られる等式を書け．（6 点）

(2) (1) を用いて，A^4 を $cA + dE$ $(c, d \in \boldsymbol{R})$ という形の式で表せ．（6 点）

(3) (1) を用いて，A^{-1} を $cA + dE$ $(c, d \in \boldsymbol{R})$ という形の式で表せ．（6 点）

4. $A=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．（6 点）

(2) (1) で求めた各固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．（8 点）

(3) A を対角化せよ．（6 点）

(4) n を自然数とする．A^n を求めよ．（8 点）

5. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求め, 各固有値について固有空間の基底を求めよ. （１４点）

(2) (1) で求めた各固有空間の基底が A の固有ベクトルであることを, 固有ベクトルの定義に従って確認せよ（計算のみ書けば良い）.（６点）

(3) A を対角化せよ.（６点）