線形代数学 II　中間試験問題 (２０２２ 年 １２ 月)

氏名

学籍番号

1. 実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, -1, 2),\ \boldsymbol{a}_2 = {}^t(2, 3, 1),\ \boldsymbol{a}_3 = {}^t(1, -6, 5)$ について，次の問いに答えよ.　　（各６点）

    (1)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が一次独立であることを一次独立の定義に従って示せ.

    (2)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次従属であることを示せ.

2. $W = \left\{ {}^t(x, y) \;\middle|\; x, y \in \mathbf{R},\ 4x - y = 0 \right\}$ は実ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間になることを示せ.　　（８点）

3. $V = \left\{ {}^t(x, y) \;\middle|\; x, y \in \mathbf{R},\ 4x^2 - y = 0 \right\}$ は実ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間にならないことを示せ. （6点）

4. $\mathbf{R}^3$ のベクトルの組 $\{{}^t(0,-1,1), {}^t(1,1,0), {}^t(2,1,1), {}^t(3,2,1)\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であるか否か理由とともに答えよ. （4点）

5. ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ の間に

$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = 3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - 6\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = -5\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_3$

の関係があるとする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ への変換行列 P を求めよ. （5点）

(2) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ から $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ への変換行列 Q を求めよ (成分表示を求めること). （6点）

(3) V のベクトル $\boldsymbol{x}$ の $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ に関する座標が $(2, 0, 1)$ のとき, $\boldsymbol{x}$ の $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関する座標を求めよ. （6点）

6. ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ が一次独立であるとき, $\{2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2\}$ は一次独立かどうか理由とともに答えよ. （8点）

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ とし, A の 第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする $(j = 1, 2, \ldots, 5)$. 以下の問いに答えよ. ((1) 9点　(2) 8点)

(1) $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ とする. 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解系（解空間の基底）を1組求めよ. また解空間の次元を答えよ.

(2) A の列ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5\}$ で生成される $\mathbf{R}^3$ の部分空間について, その基底となるものを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_5$ から1組選べ. また他の $\boldsymbol{a}_i$ をそれらの一次結合で表せ.

8.　xy 平面において, 次の問いに答えよ.　（（1）4点　（2）6点）

(1)　各点を原点の回りに 120° 回転させる1次変換を定める行列を求めよ.

(2)　点 $\left(\sqrt{3},\ 5\right)$ を原点の回りに 120° 回転させた点Pの座標を求めよ.

9.　xy 平面において, 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で定まる1次変換 $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を考える.

(1)　f_A によって直線 $\ell : 2x + 3y - 6 = 0$ はどのような図形に移されるか. (図形の方程式を求めよ).　（8点）

(2)　$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ がそれぞれ $\mathrm{Im}\, f_A$ に属することを示せ.　（6点）

(3)　$\dim \mathrm{Ker}\, f_A = 0$ を示せ.　（4点）