線形代数学 II　中間試験問題 (２０２３ 年 １２ 月)

氏名

学籍番号

1. 実ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1,-1)$ $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t(-2,2)$ について, 次の問いに答えよ.

   (1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属であることを定義に従って説明せよ.　（５点）

   (2) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ.　（８点）

   (3) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であるかどうかを理由とともに答えよ.　（４点）

2. ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が一次独立であるとき,
   $\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$ は一次独立かどうか理由とともに答えよ.　（８点）

3. ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ の間に次の関係があるとする.

$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ への変換行列 P を求めよ. （5点）

(2) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ から $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ への変換行列 Q を求めよ (成分表示を求めること). （6点）

(3) V のベクトル $\boldsymbol{x}$ の $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ に関する座標が $(3, 1, 2)$ のとき, $\boldsymbol{x}$ の $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関する座標を求めよ. （6点）

4. $W = \left\{ {}^t(x, y) \;\middle|\; x, y \in \mathbf{R},\ x - 2y = 0 \right\}$ は実ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間になることを示せ. （8点）

5. $V = \left\{ {}^t(x, y) \;\middle|\; x, y \in \mathbf{R},\ x \geqq 0 \right\}$ は実ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の部分空間にならないことを示せ. （6点）

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし, A の 第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする $(j = 1, 2, \ldots, 4)$.

以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ とする. 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解系（解空間の基底）を１組求めよ. また解空間の次元を答えよ. （１０点）

(2) A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ で生成される $\mathbf{R}^3$ の部分空間を W とする. W の基底となるものを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_4$ から１組選べ. また他の $\boldsymbol{a}_i$ をそれらの一次結合で表せ. （８点）

7.　xy 平面において, 次の問いに答えよ.

(1)　各点を原点の回りに 60° 回転させる 1 次変換を定める行列を求めよ.　（4 点）

(2)　点 $\left(5, \sqrt{3}\right)$ を原点の回りに 60° 回転させた点 P の座標を求めよ.　（6 点）

8.　xy 平面において, 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換 $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を考える.

(1)　$\mathrm{Im}\, f_A$ に属するベクトルを 2 つ挙げよ.　（4 点）

(2)　$\mathrm{Ker}\, f_A$ に属するベクトルを 2 つ挙げよ.　（4 点）

(3)　f_A によって直線 $\ell : 2x - y + 3 = 0$ はどのような図形に移されるか.
(図形の方程式を求めよ).　（8 点）