

線形代数学 II ABC クラス 中間試験問題（2024年12月）

氏名

学籍番号

1. ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ のベクトル $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ は 1 次独立であることを定義に従って示せ. (6 点)

(2) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ. (6 点)

(3) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ に関する座標を求めよ. (6 点)

(4) ある線形変換 $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ は, $T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たしている.

このとき, (3) の $\mathbf{x}$ について, $T(\mathbf{x})$ を求めよ. (4 点)

2. ベクトル空間 V の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ と $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ の間に次の関係があるとする.

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ から $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ への変換行列 P を求めよ. (6点)

- (2) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ から $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ への変換行列 Q を求めよ. (6点)

- (3) V のベクトル $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$ を $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ の1次結合で表せ. (6点)

3. 部分空間に関する次の問いに答えよ. ((1) 各3点, (2) 6点)

- (1) V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする. V の部分集合 W が V の部分空間である必要十分条件は, 次の3つの条件を満たすことである. 下線に適切な文章を入れよ.

(i) $\mathbf{0}_V \in W$.

(ii) _____

(iii) _____

- (2) 次の W は $\mathbf{R}^2$ の部分空間ではないことを示せ.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ とし, A の第 j 列ベクトルを $\mathbf{a}_j$ とする ($j = 1, 2, 3, 4$).

以下の問いに答えよ.

- (1) ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の 1 次独立な最大個数 r を求めよ. また, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の中から 1 次独立な r 個のベクトルを選び, その他のベクトルを選んだベクトルの 1 次結合で表せ. (10 点)

- (2) A を係数行列とする同次連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

この解空間 W の基底を 1 組求めよ. また, W の次元を求めよ. (10 点)

5. 座標平面における次の問いに答えよ.



(1) 各点を原点の回りに 30° 回転させる 1 次変換を定める行列を求めよ. (6 点)

(2) 点 $(5, \sqrt{3})$ を原点の回りに 30° 回転させた点 P の座標を求めよ. (6 点)

6. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ で定まる 1 次変換 $T_A: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を考える.



(1) $\text{Im } T_A$ に属するベクトルを 2 つ挙げよ. (4 点)

(2) $\text{Ker } T_A$ に属するベクトルを 2 つ挙げよ. (4 点)

7. V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする. V のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が 1 次独立であるとき, 次のベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は 1 次独立であるかどうか理由とともに答えよ.

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_2 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_3 = -\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 7\mathbf{a}_3. \quad (8 \text{ 点})$

