線形代数学II　ABC クラス　中間試験問題（２０２５年１２月）

氏名

学籍番号

1. ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は 1 次独立であることを定義に従って示せ.　　（6 点）

(2) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ.　　（6 点）

(3) $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であるかどうかを理由と共に答えよ.　　（5 点）

(4) ある線形変換 $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は, $T(\boldsymbol{u}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\boldsymbol{u}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たしている.
$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2$ について, $T(\boldsymbol{x})$ を求めよ.　　（5 点）

2.　A を $m \times n$ 行列とし，$\mathbf{0}$ を $\mathbf{R}^m$ の零ベクトルとする．$\mathbf{R}^n$ の部分集合

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

について, 次の問いに答えよ．

(1)　W が $\mathbf{R}^n$ の部分空間である必要十分条件は，次の 3 つの条件を満たすことである．下線に適切な文章を入れよ．（各 2 点）

(i) $\mathbf{R}^n$ のゼロベクトルは W に属する．

(ii) ____

(iii) ____

(2)　W は (i) を満たす．W は (ii), (iii) も満たすことを示せ．（8 点）

3.　次の同次連立 1 次方程式の解空間を W とする．

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

(1)　W の基底を 1 組求めよ．（8 点）

(2)　W の次元を答えよ．（4 点）

4. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 3 & -1\\ 3 & -3 & 3 & -9\end{bmatrix}$ とし, A の 第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする $(j=1,2,3,4)$.

ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ の 1 次独立な最大個数 r を求めよ.
また, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ の中から 1 次独立な r 個のベクトルを選び, その他のベクトルを選んだベクトルの 1 次結合で表せ. （１０点）

5. ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ と $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ の間に次の関係があるとする.

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{b}_3=-\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3.$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ への変換行列 P を求めよ. （６点）

(2) V のベクトル $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ を $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の 1 次結合で表せ. （１０点）

6.　座標平面における次の問いに答えよ.

(1)　各点を原点の回りに 60° 回転させる 1 次変換を定める行列を求めよ.　（6 点）

(2)　点 $\left(\sqrt{3},\ 5\right)$ を原点の回りに 60° 回転させた点 P の座標を求めよ.　（6 点）

7.　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ で定まる 1 次変換 $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を考える.

(1)　$\operatorname{Im} T_A$ に属するベクトルを 2 つ挙げよ.　（4 点）

(2)　$\operatorname{Ker} T_A$ に属するベクトルを 2 つ挙げよ.　（4 点）

8.　V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする. V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であるとき,
次のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は 1 次独立であるかどうか理由とともに答えよ.
$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3, \qquad \boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3.$　（8 点）