オートマトンと言語
4回目　5月2日(水)

3章(グラフ)の続き

授業資料

http://ir.cs.yamanashi.ac.jp/~ysuzuki/public/automaton/

授業の予定(中間試験まで)

回数	月日	内容
1	4月11日	オートマトンとは，オリエンテーション
2	4月18日	2章(数式の記法，スタック，BNF)
3	4月25日	2章(BNF)，3章(グラフ)
4	5月02日	3章(グラフ)
5	5月09日	4章　有限オートマトン1
6	5月16日	有限オートマトン2　2･3章の小テスト
7	5月23日	正規表現
8	5月30日	正規表現，非決定性有限オートマトン
9	6月06日	中間試験，前半のまとめ

出張などにより，授業日が変更になる場合があります．

授業の予定

回数	月日	内容
10	6月13日	NFA→DFA
11	6月20日	DFAの最小化
12	6月27日	DFAの最小化，有限オートマトンの応用
13	7月04日	プッシュダウンオートマトン，チューリング機械
14	7月11日	形式言語理論，文脈自由文法
15	7月18日	期末試験，まとめ

出張などにより，授業日が変更になる場合があります．

前回のまとめ

2章
- BN(F)記法

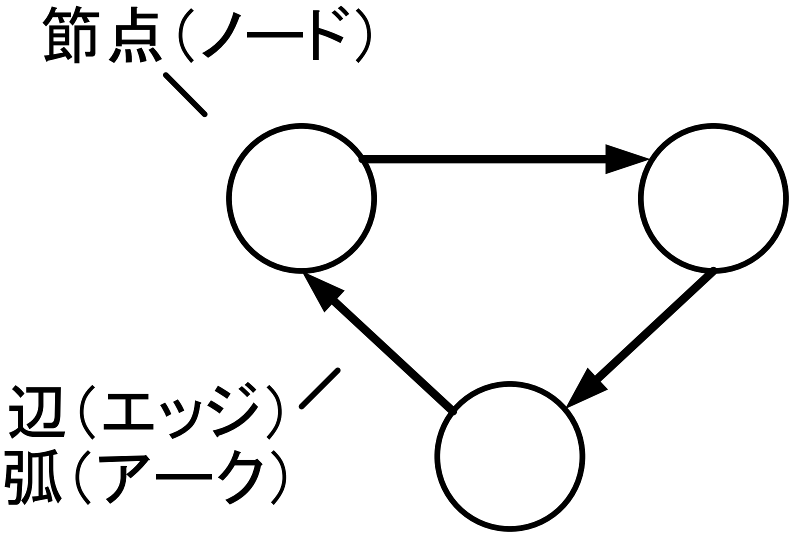
3章
- （離散）グラフ
- 多重グラフ
- 単純グラフ
- 連結グラフ
- （コンピュータで扱う場合の）グラフの表現

前回の宿題

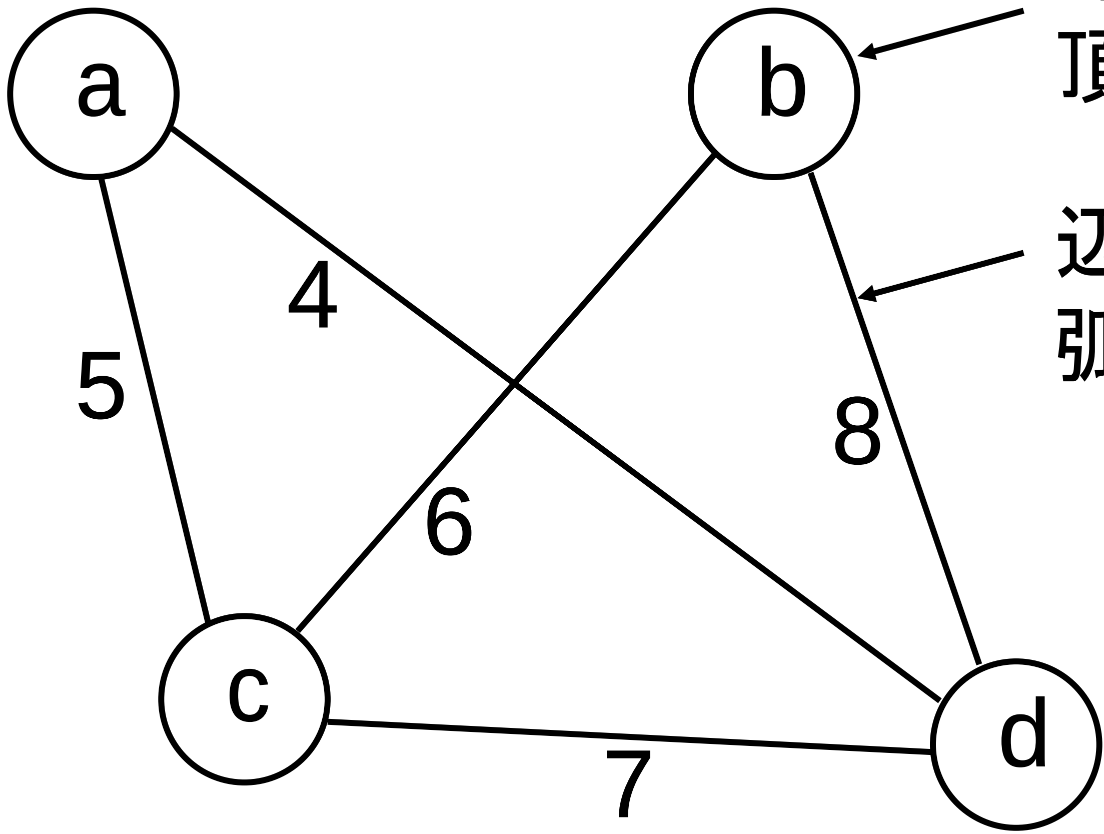
- 演習問題4（BNF⇒構文図式）
- グラフの説明内の用語を覚える
- 集合表現⇔隣接行列⇔隣接リスト
  - 表現を変換し表示するプログラムを作る

3章　離散グラフと木グラフ

- （離散）グラフ (49ページ)
  - 節点（ノード）の集合と節点を結ぶ辺（エッジ, アーク）の集合



離散グラフの例　ラベル付き無向グラフ（49ページ）

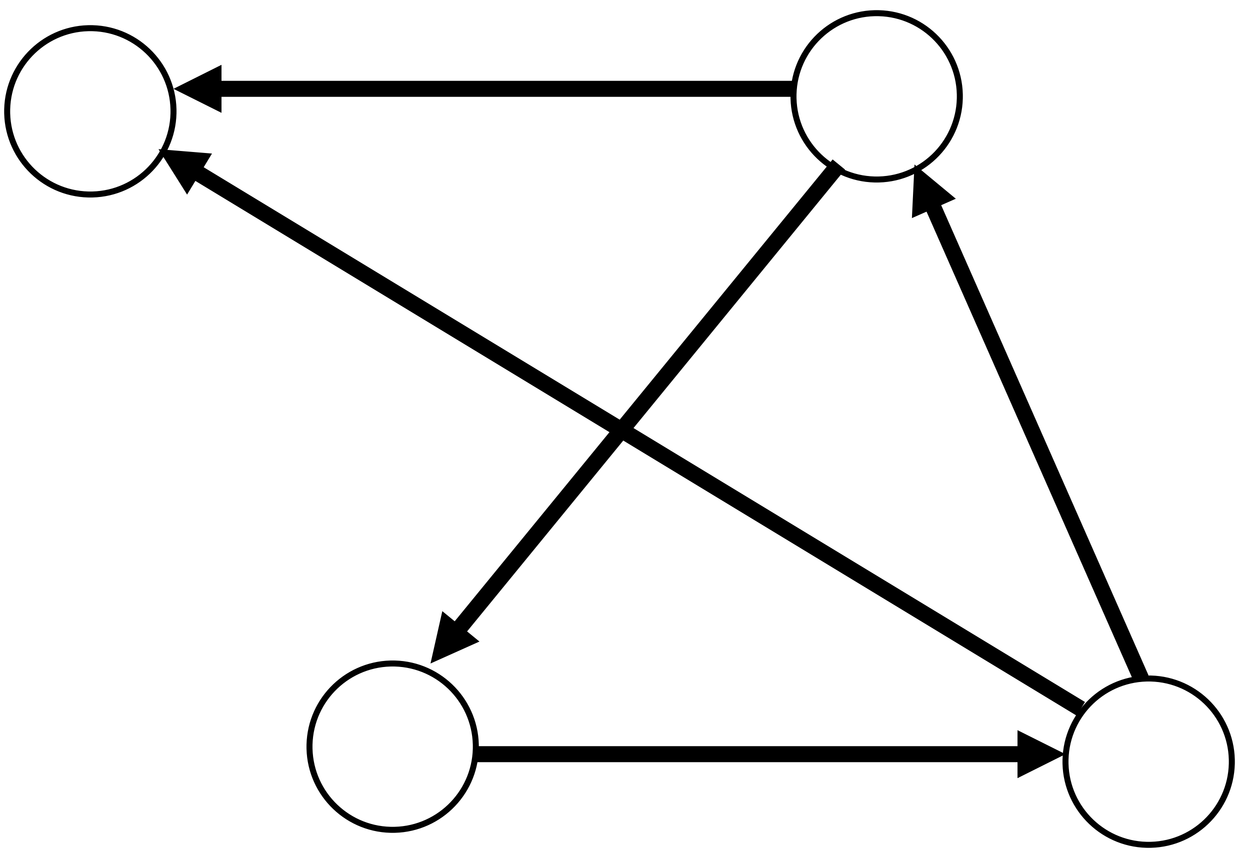


節点（ノード）
頂点，点

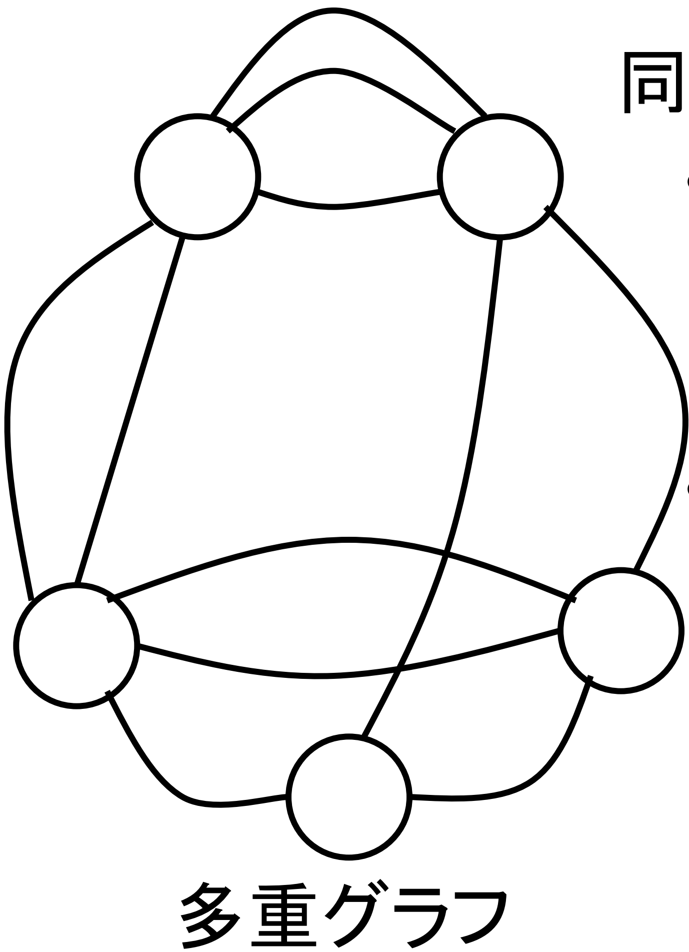
辺（エッジ）
弧（アーク）

離散グラフの例　有向グラフ (49ページ)

辺(アーク)に向きが有る

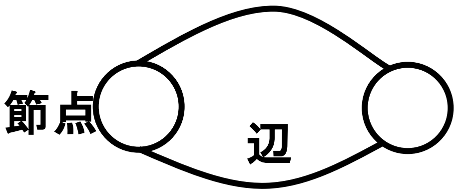


多重グラフ (50ページ)

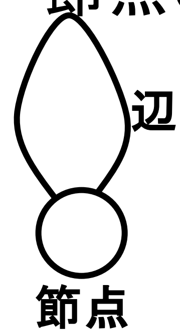


同じ節点をつなぐ辺が複数ある

- 同じ節点対を結ぶ辺が2つある(多重辺)

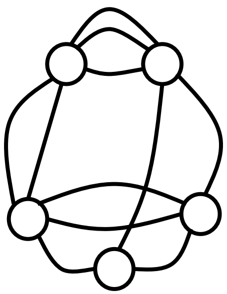


- 始点と終点が同一節点の辺がある(ループ)

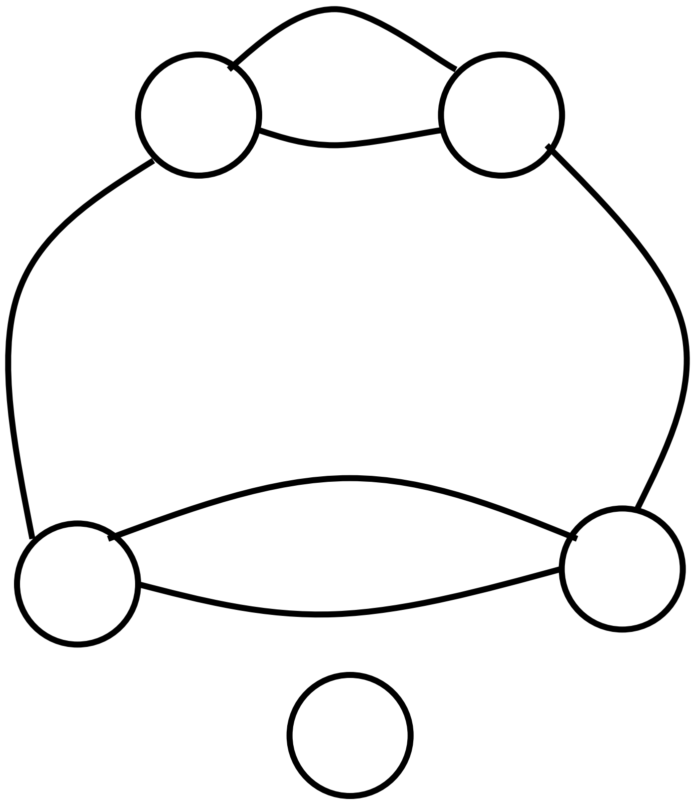


多重グラフの部分グラフ (50ページ)

多重グラフ



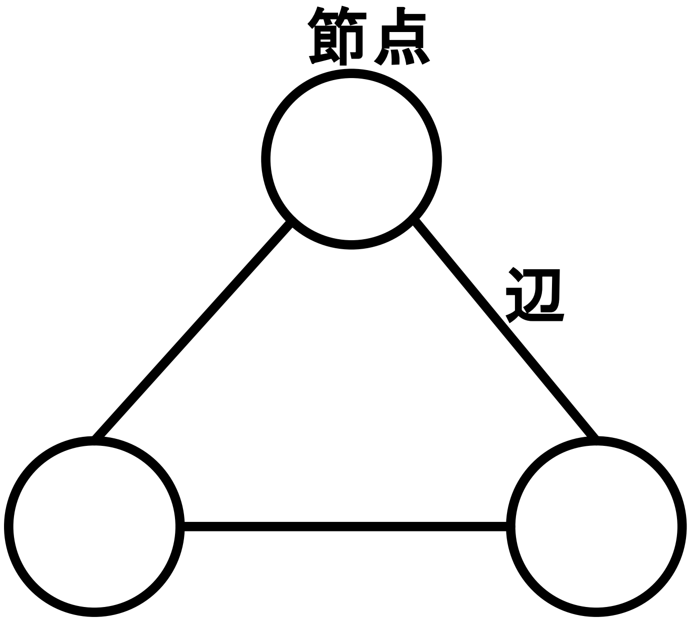
多重グラフの部分グラフ



あるグラフの部分集合がグラフをなしている（部分集合のすべての辺の両端がその部分集合の節点）

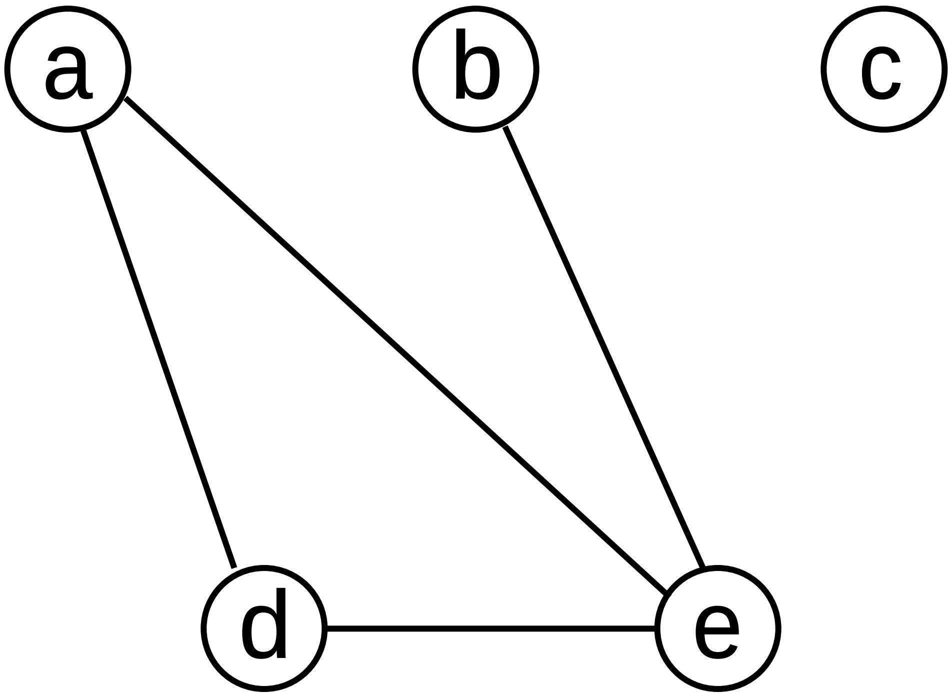
単純グラフ

- ループも多重辺も含まないグラフ
- 多重グラフ以外のグラフ



節点ラベル付き単純グラフと節点次数（51ページ）

節点の次数:節点に接続する辺の数
（隣接節点の数）

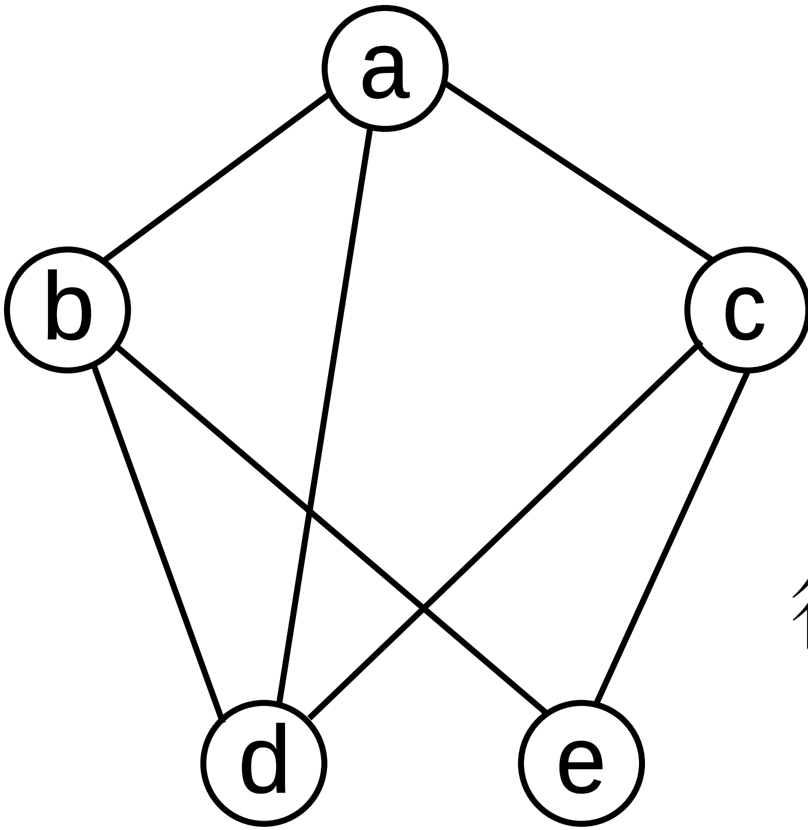


節点aの次数:2
節点bの次数:1
節点cの次数:0
節点dの次数:2
節点eの次数:3

単純グラフの
次数，径路，小径，順路，閉路

- 次数：節点に接続する辺の数(隣接節点の数）
  - 偶節点：次数が偶数の節点
  - 奇節点：次数が奇数の節点
  - 孤立点：次数0の節点
- 径路：ある二つの節点を結ぶ節点と辺の列
  - 径路の長さ：径路をなす辺の数
- 小径：辺が重複しない径路
- 順路：節点が重複しない径路
- 閉路：両端が同じ節点で，それ以外は節点の重複がない径路

径路，小径，順路，閉路の例（51ページ）



径路の例 : a-d-c-a-d-b 長さ=5
小径の例 : a-b-e-c-a-d 長さ=5
順路の例 : a-d-c-e-b 長さ=4
閉路の例 : a-b-e-c-a 長さ=4

径路 ⊃ 小径 ⊃ 順路，閉路

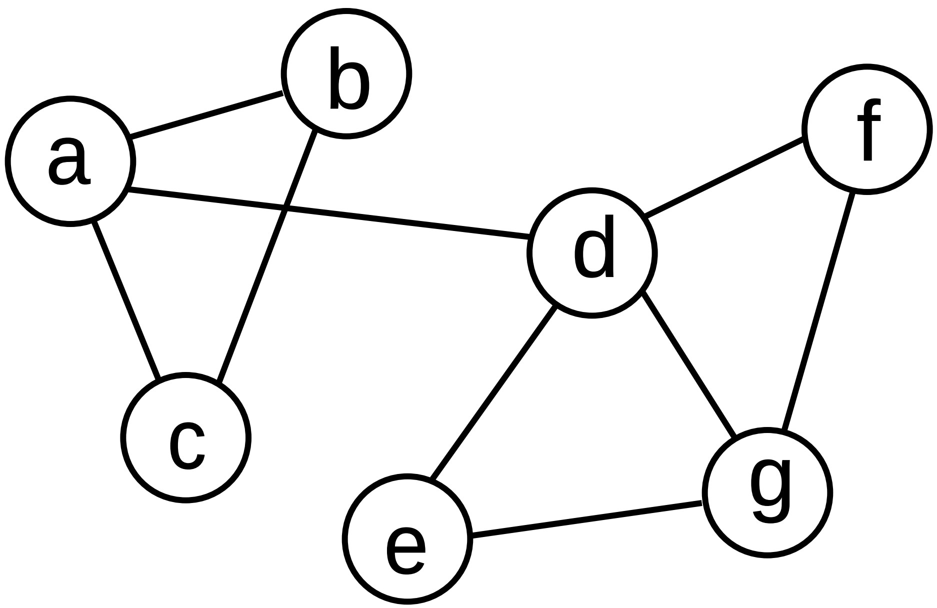
前回はここまで

連結グラフ（51ページ）

- **連結グラフ**:任意の二つの節点間に径路が存在するグラフ
- **2節点間の距離**:二つの節点間の最短の順路の長さ
- **グラフの直径**:連結グラフの任意の2点間の距離の最大値
- **切断点(カットポイント)**:ある節点とそれに連結する辺を除くと非連結になる節点
- **橋(ブリッジ)**:その辺を除くと非連結になる辺

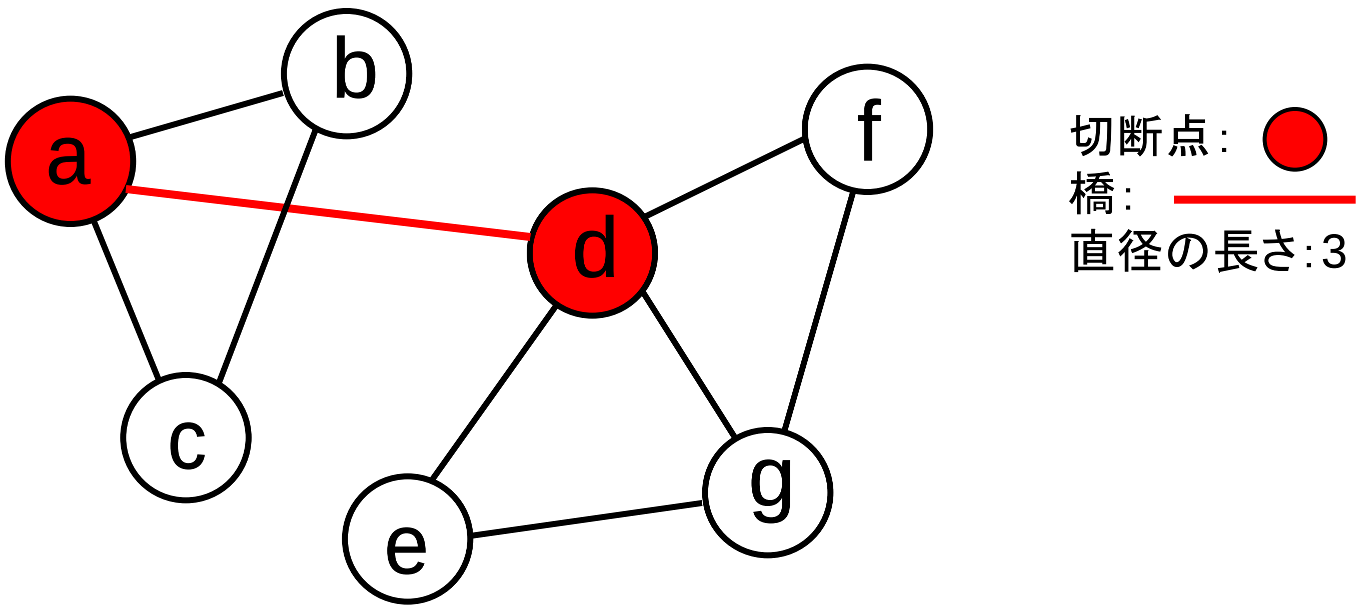
演習問題1

- 下に示す連結グラフについて
  - どこが切断点，橋になるか示しなさい
  - グラフの直径の長さを答えなさい

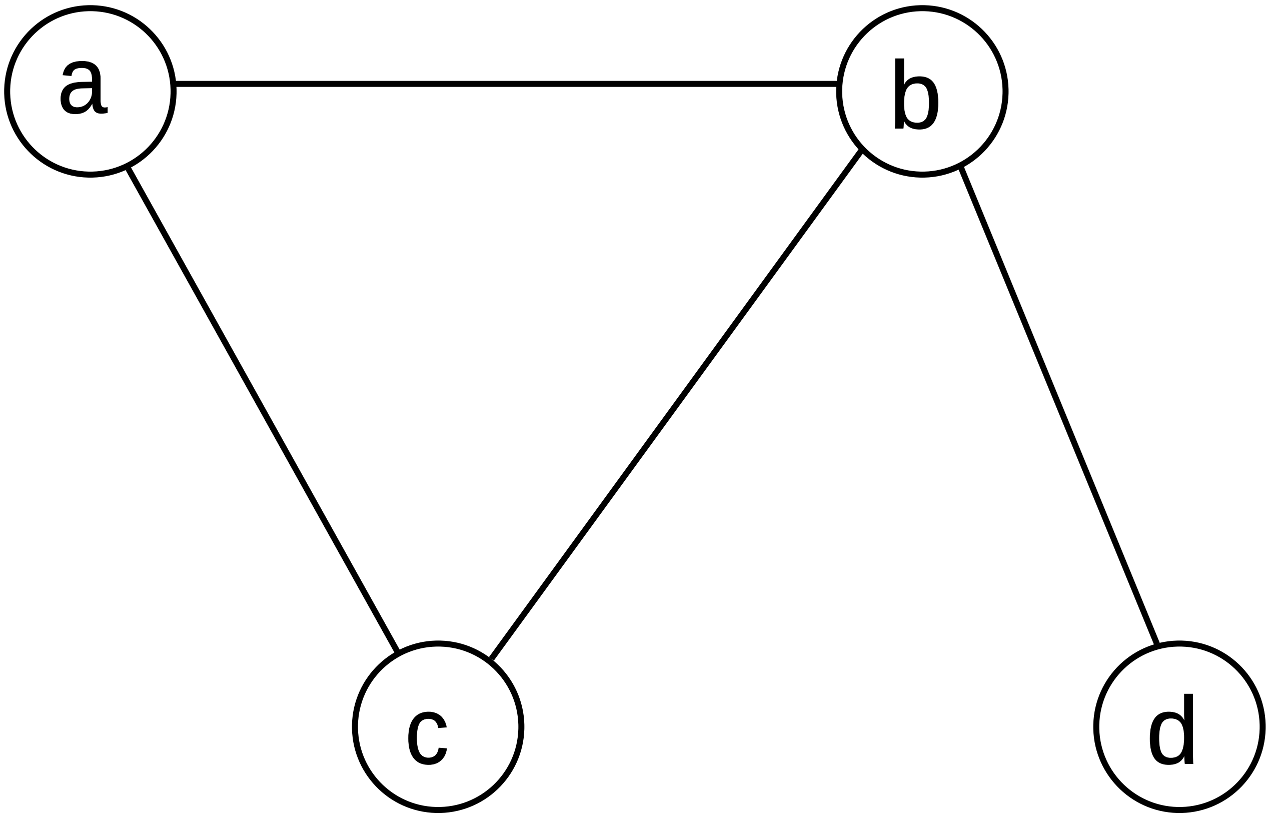


演習問題1の解答

- 下に示す連結グラフについて
  - どこが切断点，橋になるか示しなさい
  - そのグラフの直径の長さを答えなさい



グラフの表現の例　52ページ
(a) グラフ図表現

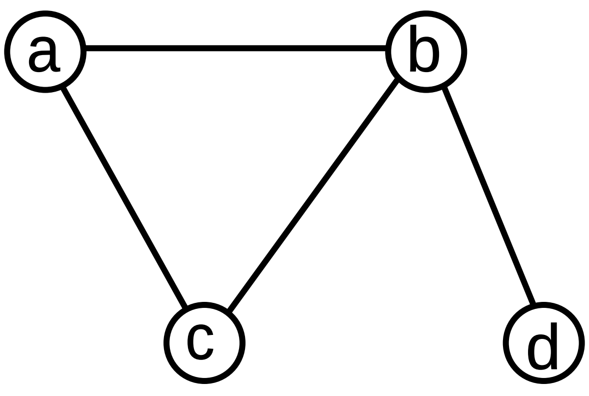


計算機にグラフの情報を格納する方法：(b),(c),(d)

グラフの表現の例　52ページ
(b) 集合表現

$$V = \{a, b, c, d\}$$ 節点の集合

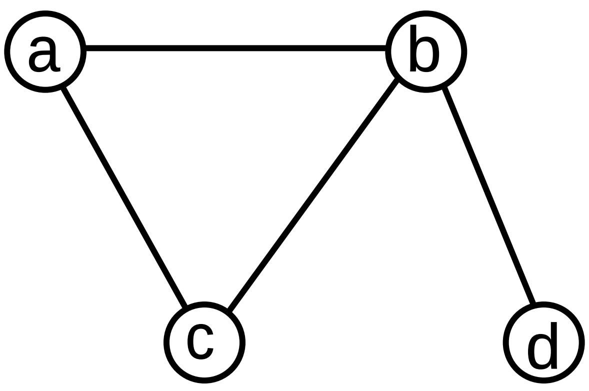
$$E = \{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d)\}$$ 辺の集合



グラフの表現の例　52ページ
(c) 隣接行列表現

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\
\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

aとbが隣接
→a行b列：1, b行a列：1



グラフの表現の例　52ページ
(d) 隣接リスト表現

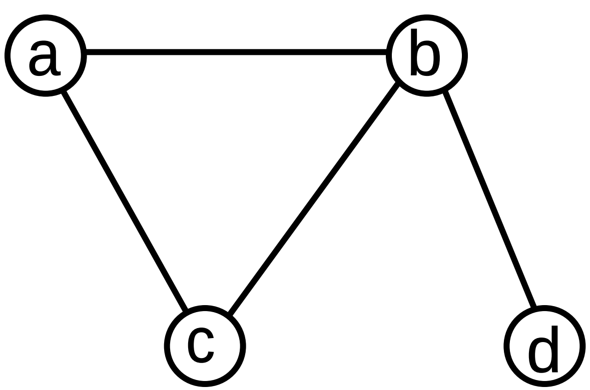
$$((a,(b,c)),$$

aはbとcに隣接している

$$(b,(a,c,d)),$$

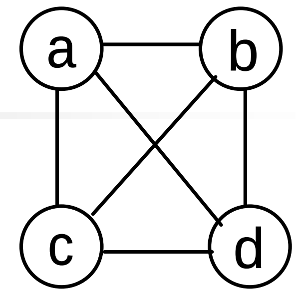
$$(c,(a,b)),$$

$$(d,(b)))$$

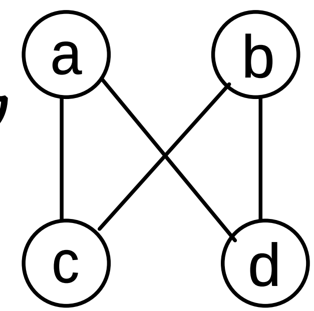


完全グラフ，正則グラフ，2部グラフ，木グラフ（53ページ）

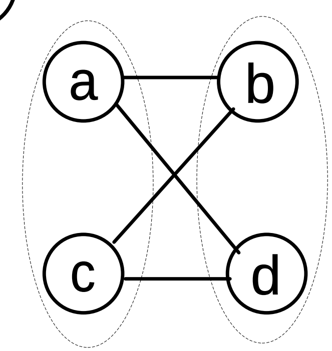
- 完全グラフ:
  - すべての節点が他のすべての節点と，辺で結ばれているグラフ



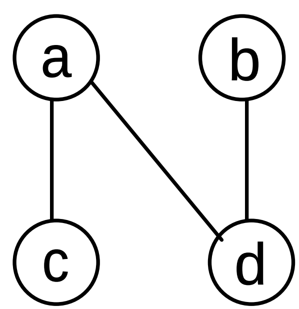
- 正則グラフ:
  - すべての節点の次数が等しいグラフ



- 2部グラフ:
  - 節点集合を2つに分けて，それぞれの集合内の節点同士を結ぶ辺がないグラフ

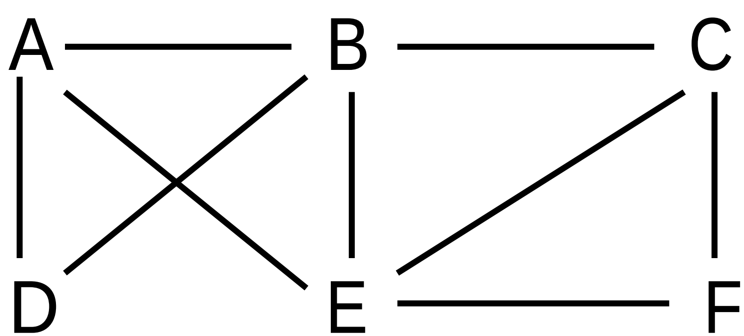


- 木グラフ:
  - 閉路のない連結グラフ



演習問題2　例題3.2
図3.6のグラフについて答えよ

- (AからFへの小径（小道）はいくつあるか)
- (AからFへの順路（道）はいくつあるか)
- AとFの間の距離を求めよ
- このグラフの直径を求めよ
- (Bを含む異なる閉路はいくつあるか)

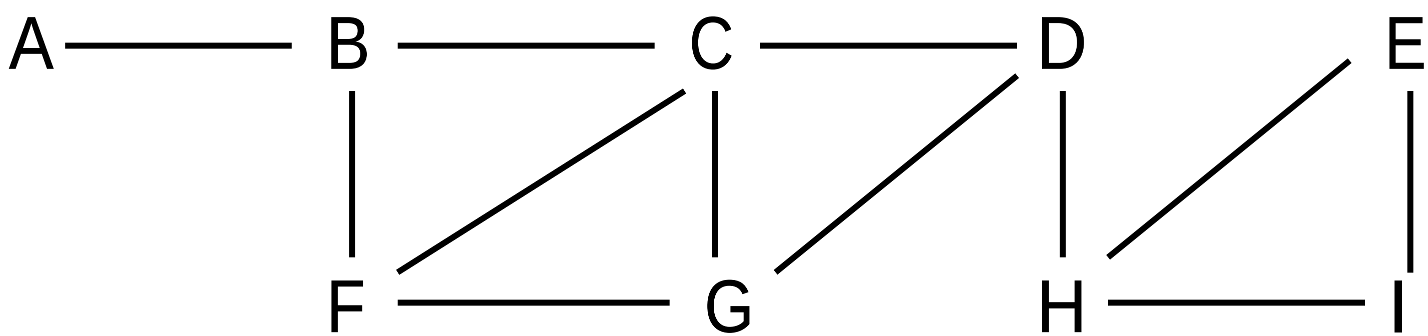


演習問題2の解答
例題3.2（52ページ）

- AからFへの小径はいくつあるか
  - 20
- AからFへの順路はいくつあるか
  - 11
- AとFの間の距離を求めよ
  - 2
- このグラフの直径を求めよ
  - 3
- Bを含む異なる閉路はいくつあるか
  - 6

演習問題3　例題3.3
図3.7のグラフについて答えよ

- グラフの隣接行列を求めよ
- (FからIへの順路はいくつあるか)
- グラフの直径を求めよ
- 切断点はどれか，すべて示せ
- ブリッジはどれか，すべて示せ



演習問題3の解答
例題3．3（52ページ）

- グラフの隣接行列を求めよ
  - 次ページ
- FからIへの順路はいくつあるか
  - 12
- FとIの間の距離を求めよ
  - 4
- グラフの直径を求めよ
  - 5
- 切断点はどれか、すべて示せ
  - B,D,H
- ブリッジはどれか、すべて示せ
  - A-B, D-H

例題3.3 a グラフの隣接行列

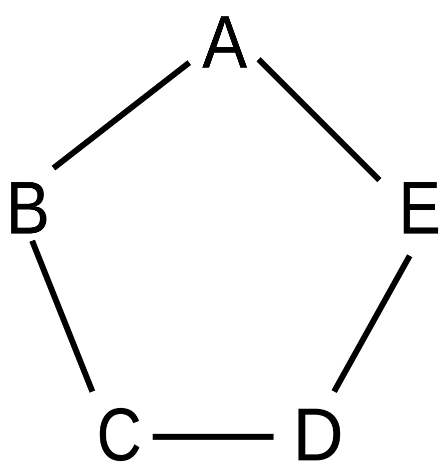
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0	1	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	1	0	0	1	0	0	0
C	0	1	0	1	0	1	1	0	0
D	0	0	1	0	0	0	1	1	0
E	0	0	0	0	0	0	0	1	1
F	0	1	1	0	0	0	1	0	0
G	0	0	1	1	0	1	0	0	0
H	0	0	0	1	1	0	0	0	1
I	0	0	0	0	1	0	0	1	0

グラフ理論（56ページ）

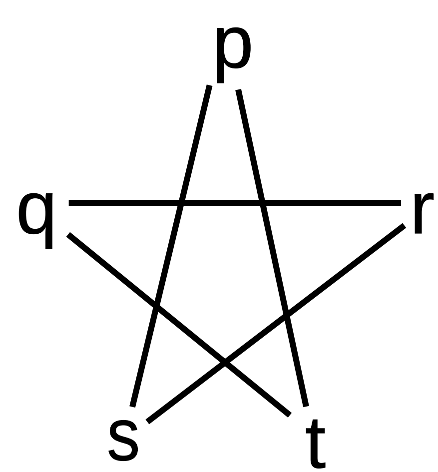
- グラフの性質について研究する学問
- アルゴリズム，コンピュータのデータ構造などに応用されている
  - 2分探索木
  - 平衡木，AVL木
  - B木

同型なグラフの例

- 二つのグラフの
  - 節点集合間の写像が全単射
  - 節点の隣接関係を保存
- →二つのグラフは互いに同型



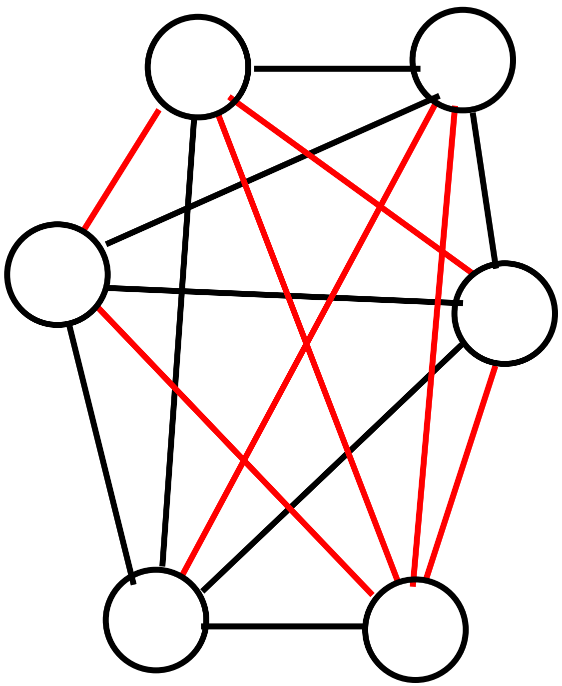
	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	1
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	0
D	0	0	1	0	1
E	1	0	0	1	0



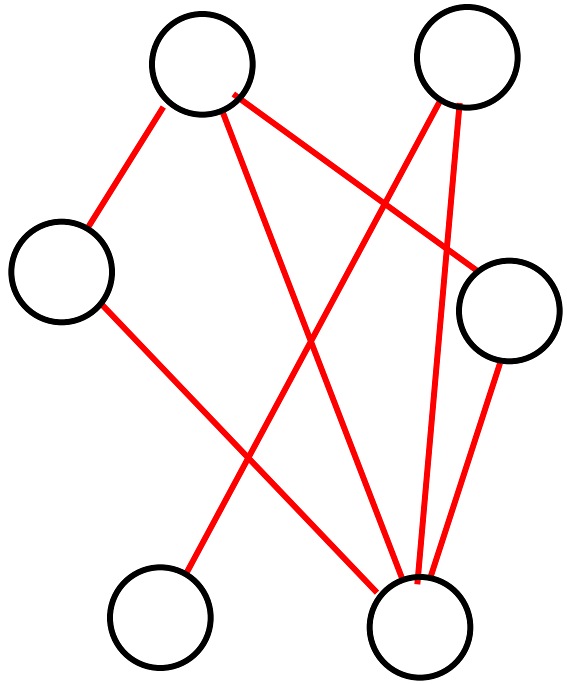
	p	s	r	q	t
p	0	1	0	0	1
s	1	0	1	0	0
r	0	1	0	1	0
q	0	0	1	0	1
t	1	0	0	1	0

(A -> p, B -> s, C -> r, D -> q, E -> t)

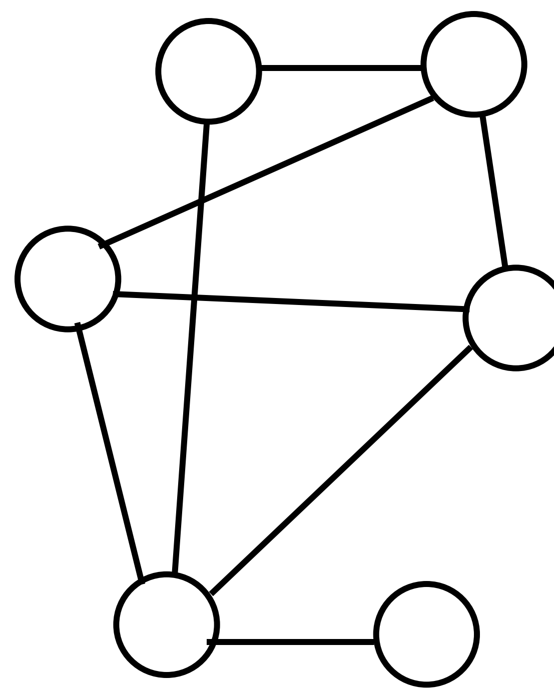
グラフとその補グラフの例



完全グラフ



グラフG

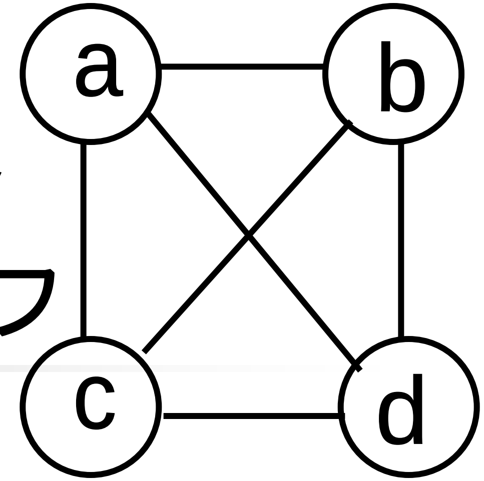


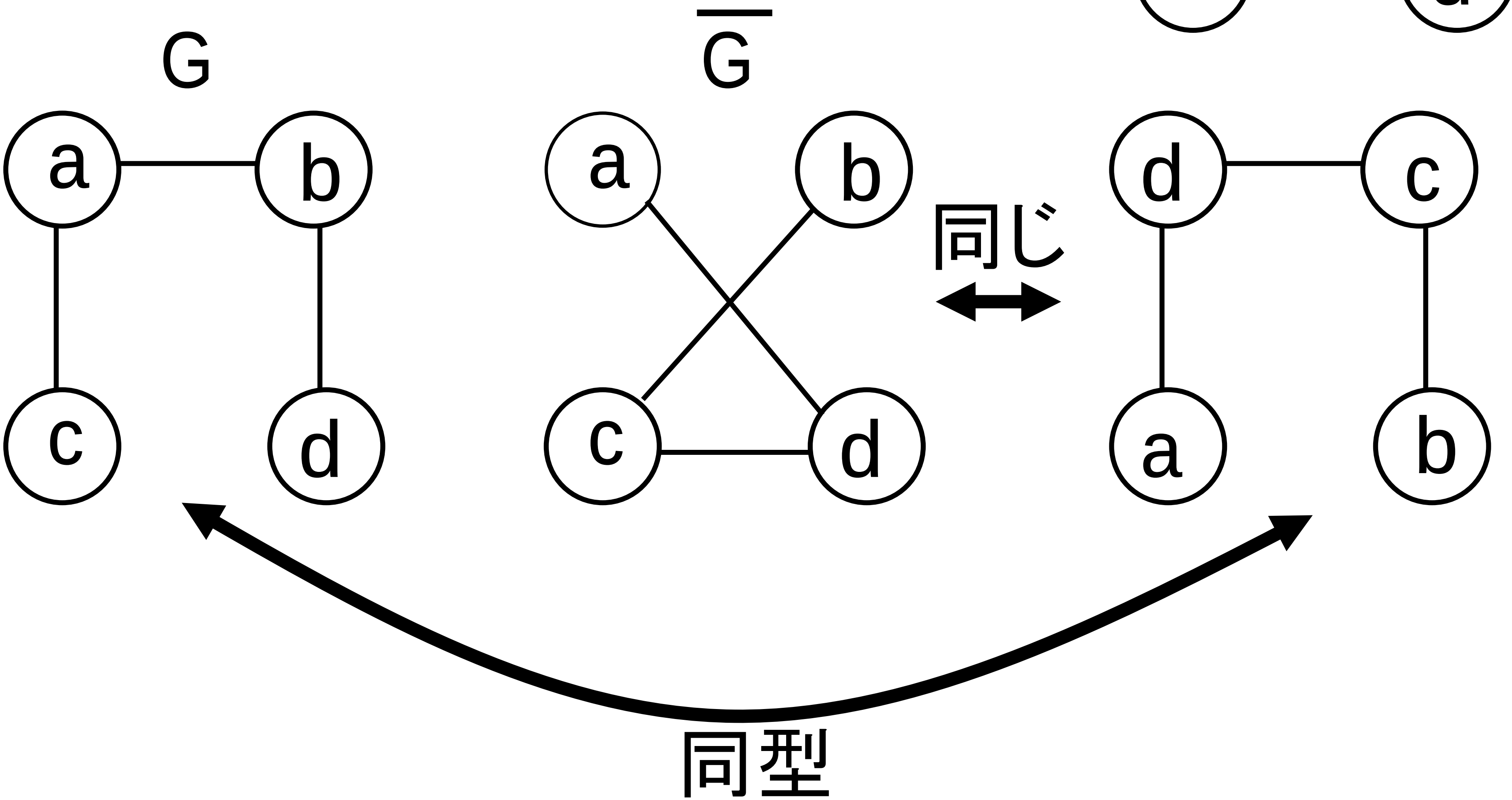
Gの補グラフ$\overline{G}$

ここまで

自己補グラフの例

完全グラフ



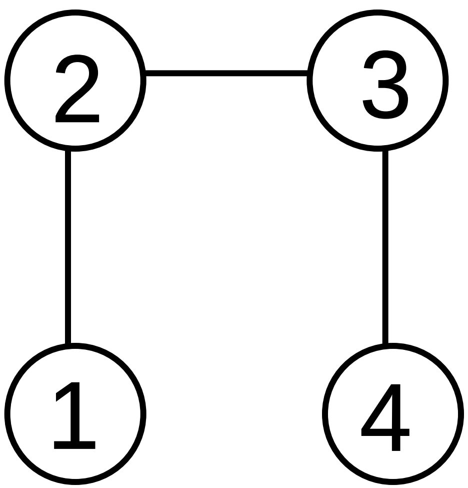


グラフの行列表現

■ 単純グラフの**隣接**行列

$$A = (a_{ij}) \quad n \times n \text{行列}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i-\text{節点と}j-\text{節点を結ぶ辺が存在するとき} \\ 0 & i-\text{節点と}j-\text{節点を結ぶ辺が存在しないとき} \end{cases}$$



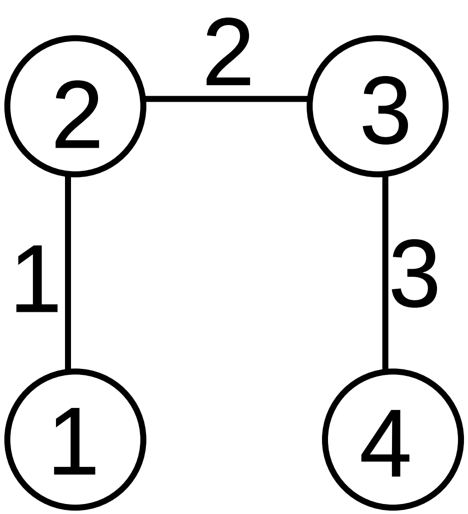
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \leftarrow \text{節点} \\ \text{節点} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{対称正方行列} \end{array}$$

グラフの行列表現

単純グラフの**接続**行列

$$M=(m_{ij})\quad n\times m\text{行列}$$

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & i-\text{節点が}j-\text{辺と接続しているとき}\\ 0 & i-\text{節点が}j-\text{辺と接続していないとき}\end{cases}$$



$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \leftarrow \text{辺} \\ \text{節点}\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

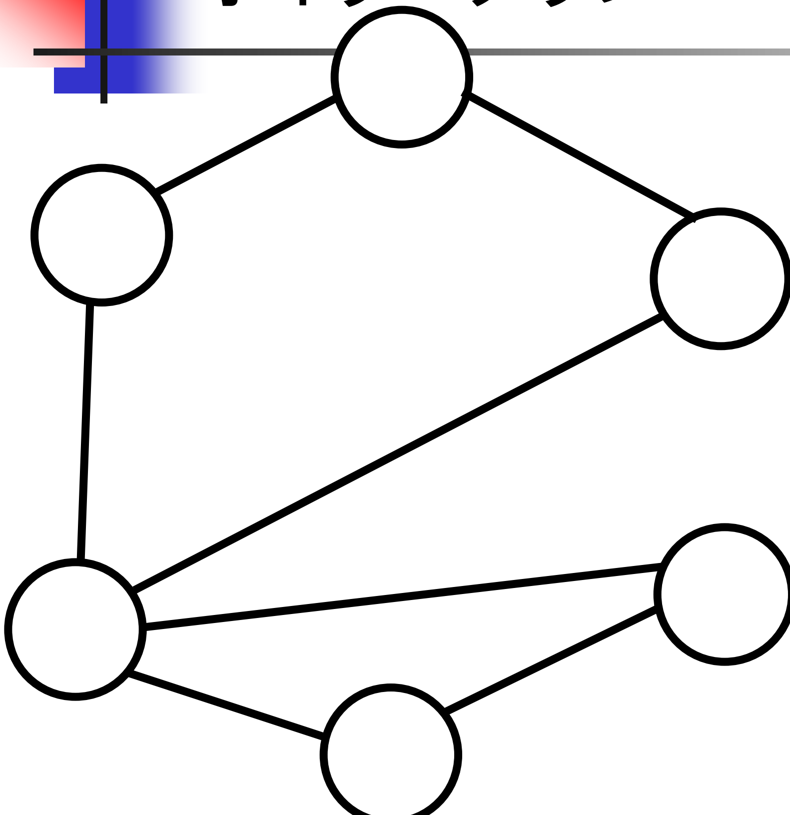
オイラーグラフとハミルトングラフ

- オイラー閉路:
  - グラフの全ての辺をちょうど1度ずつ通る閉路（**一筆書きが可能**）
- オイラーグラフ:
  - オイラー閉路が存在するグラフ

- ハミルトン閉路:
  - グラフの全ての節点をちょうど1度ずつ通る閉路（**巡回セールスマン問題**）
- ハミルトングラフ:
  - ハミルトン閉路が存在するグラフ

オイラーグラフ，ハミルトングラフ

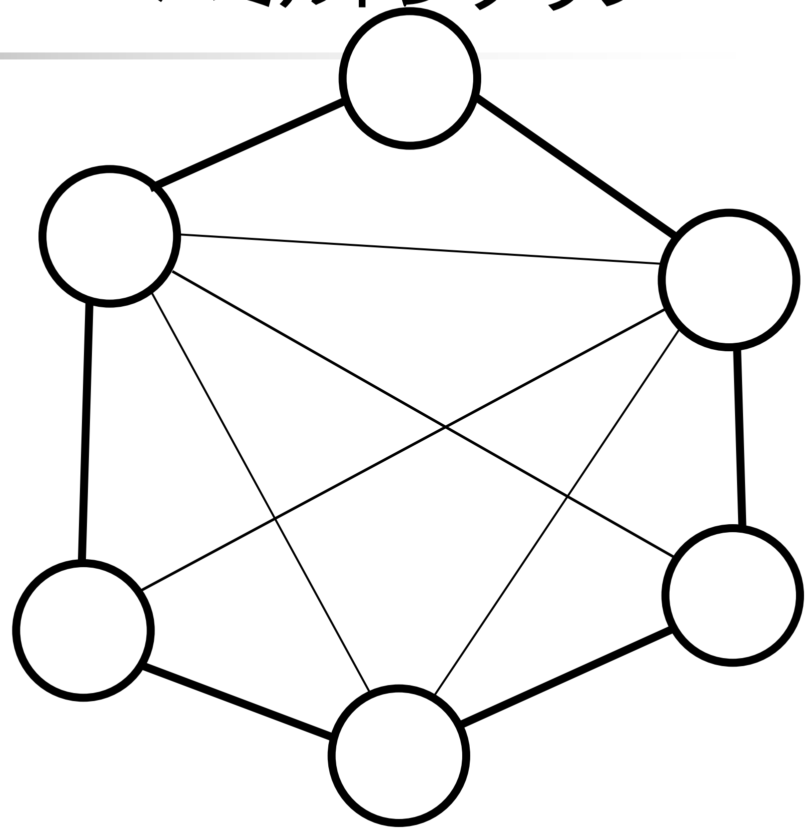
オイラーグラフ



全ての辺を1度ずつ通る閉路が存在するグラフ

一筆書きが出来る

ハミルトングラフ



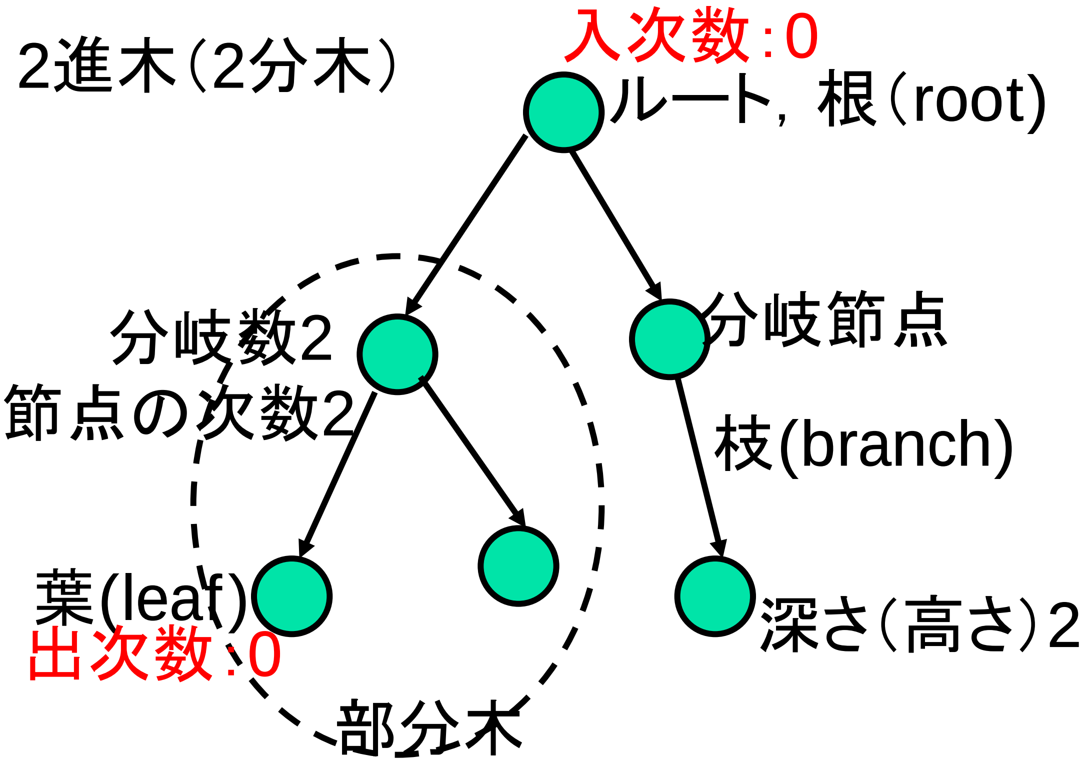
全ての節点を1度ずつ通る閉路が存在するグラフ

巡回セールスマン問題

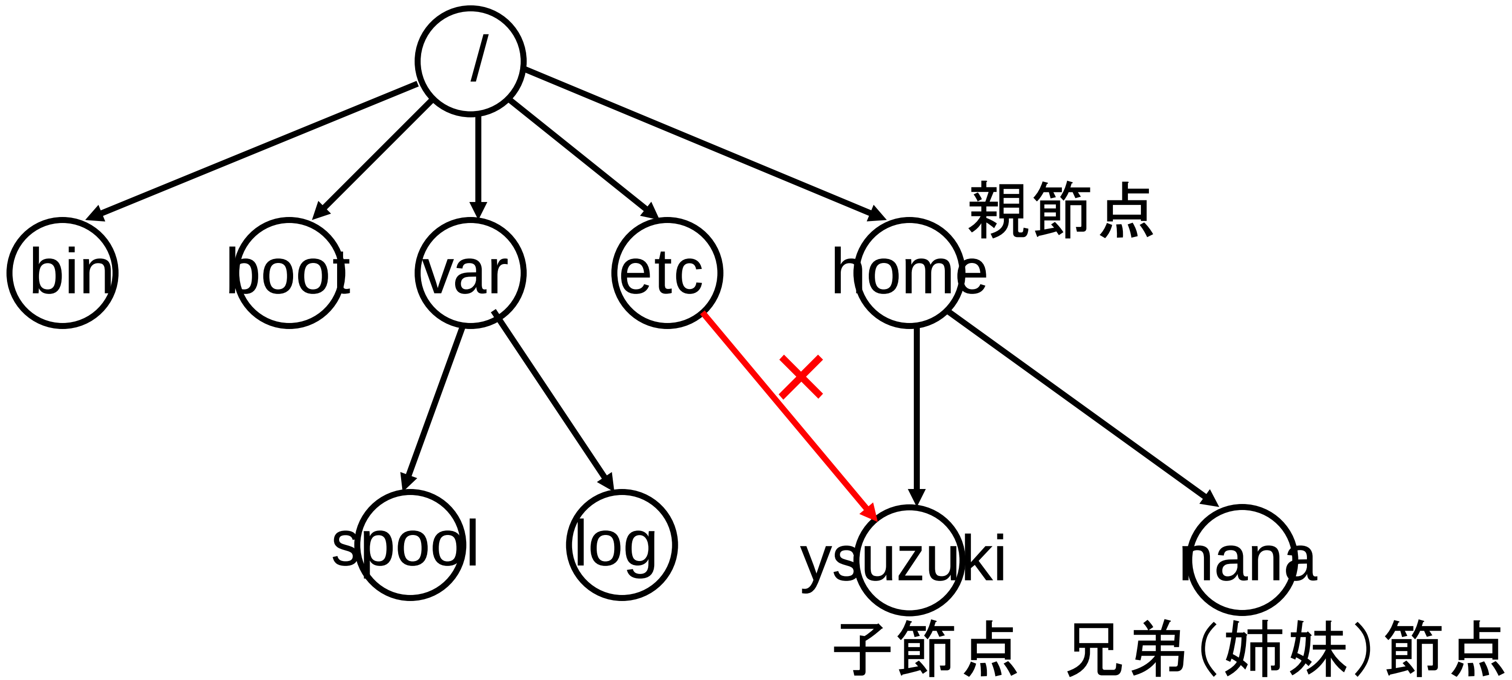
3.3 木グラフ

- 木：
  - 連結可能な有向グラフで，
  - 1つの入力節点（入次数＝0）（根）といくつかの出力節点（出次数＝0）（葉）があり，
  - かつ入口からすべての出口へ至る有向順路がそれぞれ1つだけ存在する．

木の特徴


2進木(2分木)
入次数:0
ルート，根(root)
分岐節点
分岐数2
節点の次数2
枝(branch)
葉(leaf)
出次数:0
深さ(高さ)2
部分木

木グラフの例
コンピュータのファイルシステム

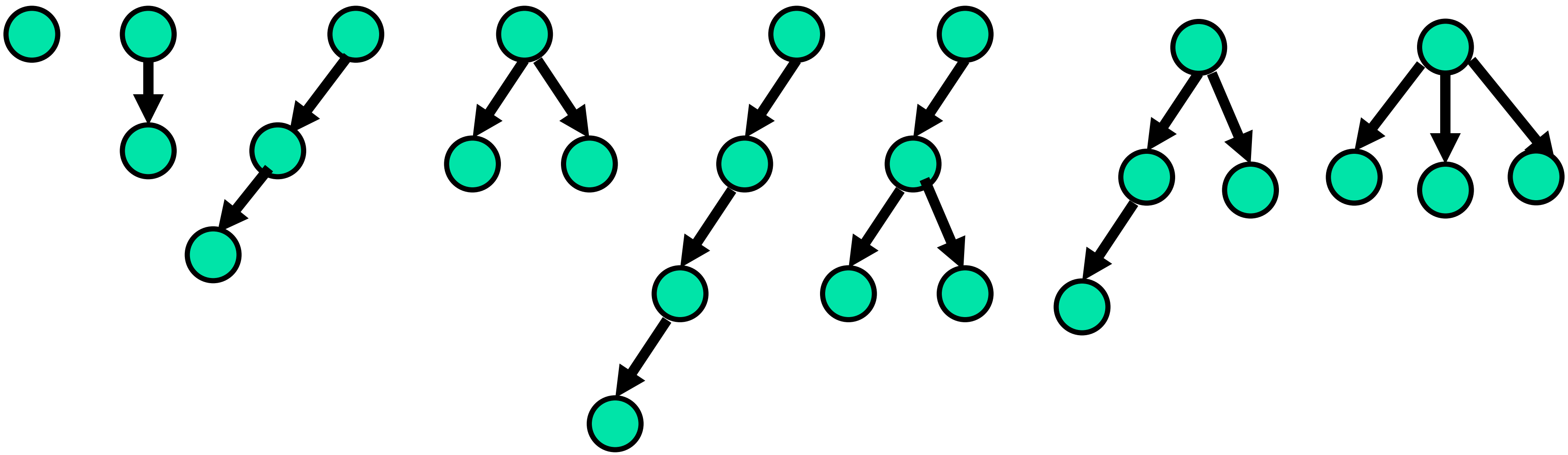


演習問題1　例題3.48(改)

- 節点が4個以下で構成される木をすべて描け

演習問題1　例題3.48(改)の答え

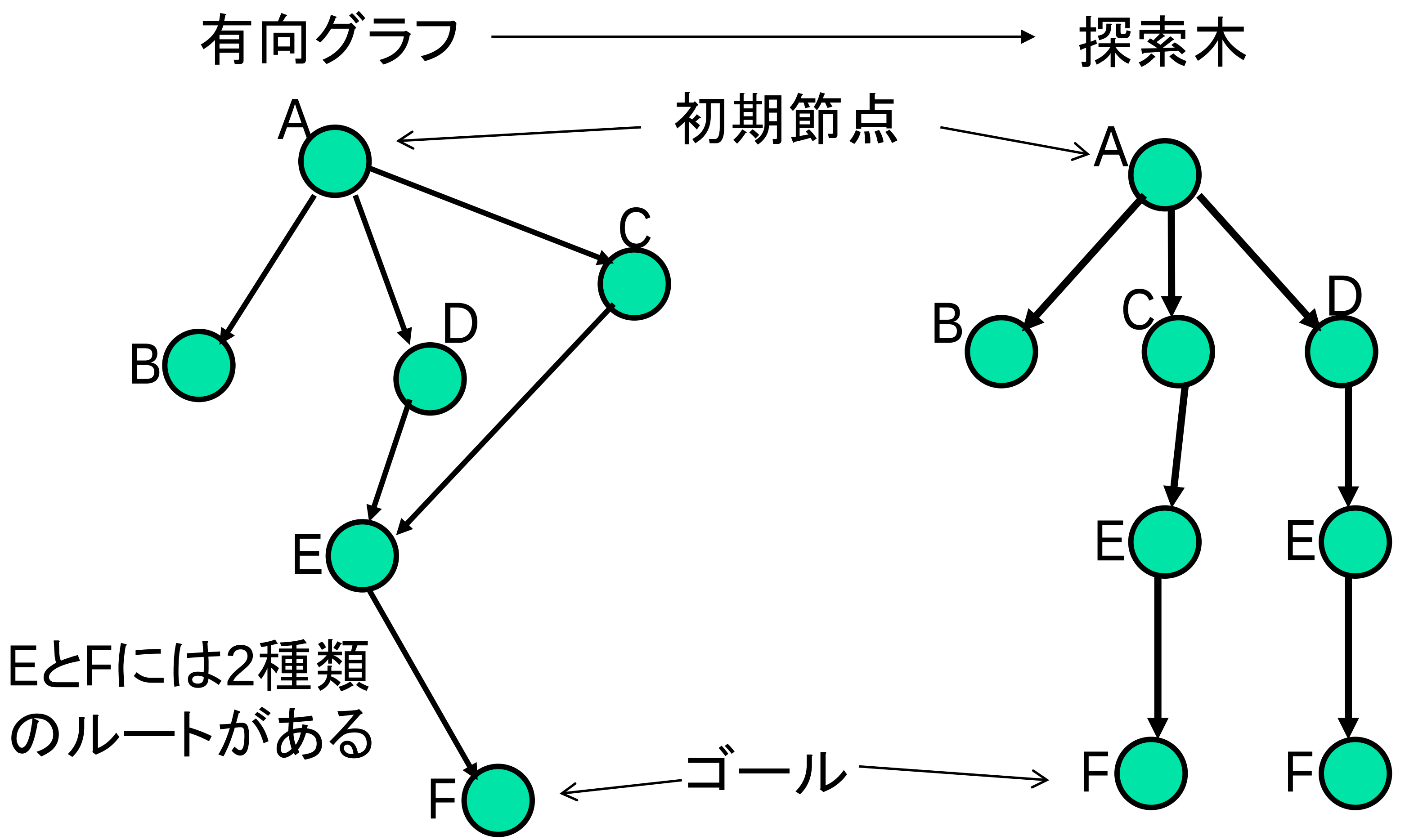
- 節点が4個以下で構成される木をすべて描け



8種類

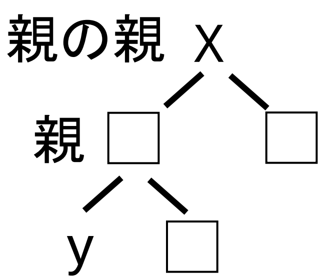
グラフの探索と探索木

AからFへの探索



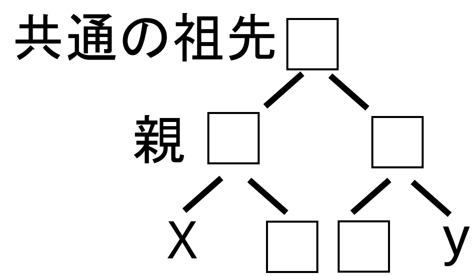
順序木

- 順序木の定義
  - 任意の$x,y \in S$ （Sは木の節点集合）に対し，
    - x,yが祖先・子孫関係の順序集合$(S;\geqq_t)$で比較可能なとき，xがyの祖先ならば$x \geqq_o y$
    - x,yが$(S;\geqq_t)$で比較不能のとき，x,yの共通の祖先（Sにおける$\{x,y\}$の上限節点）での枝の集合で，xの属する枝の根がyの属する枝の根より上位であれば（左にあれば），$x \geqq_o y$



$x \geqq_t y$

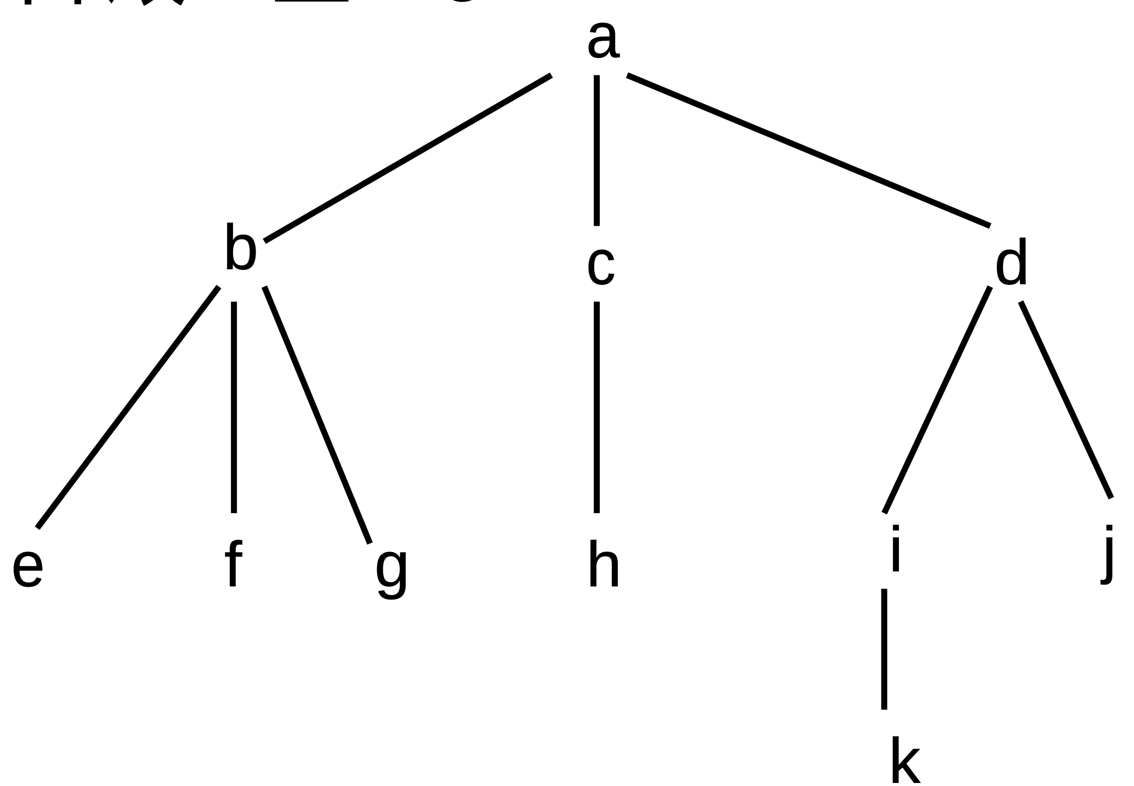
$x \geqq_o y$



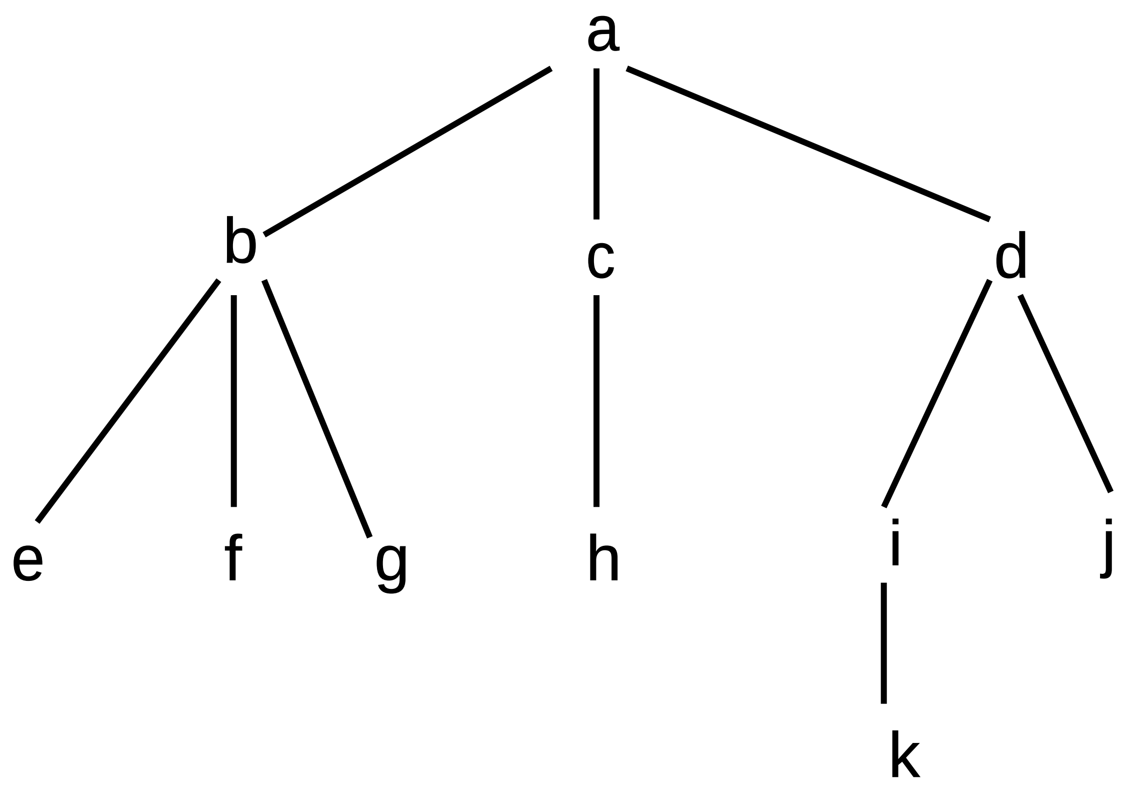
$x \geqq_o y$

演習問題2 例題3.59

- 図3. 24の順序木の節点を，全順序関係$\geq_o$により，降順に並べよ.

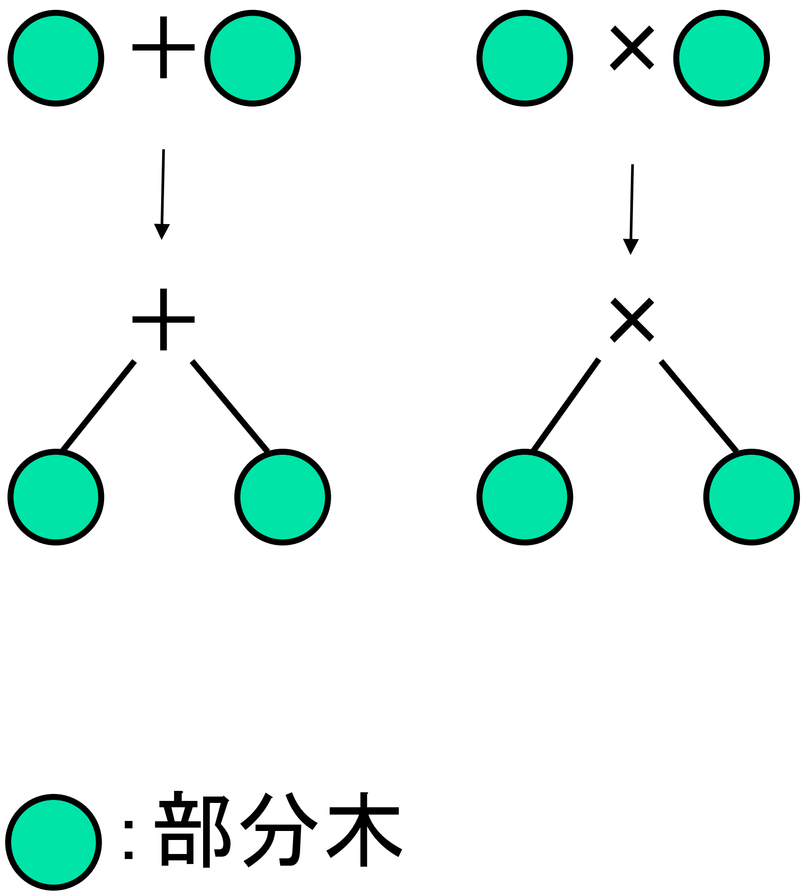


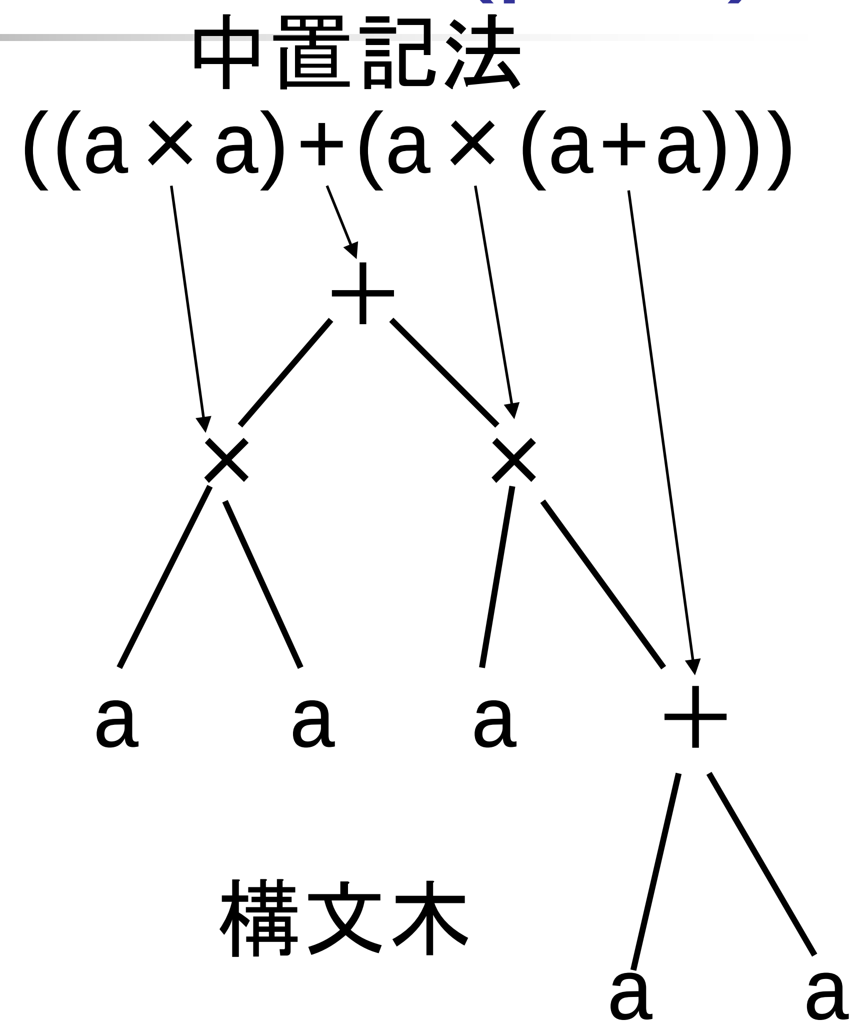
演習問題2 例題3.59の答え



a-b-e-f-g-c-h-d-i-k-j　前置記法の順序

数式の構文と構文解析 (p.78)



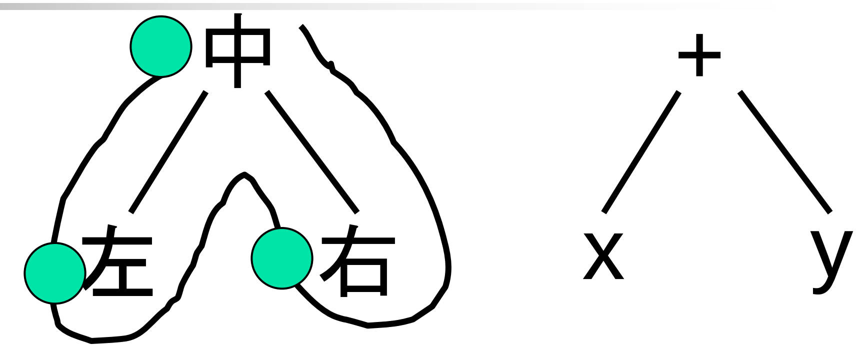


各数式記法と構文木の関係

前置記法：中→左→右

+xy

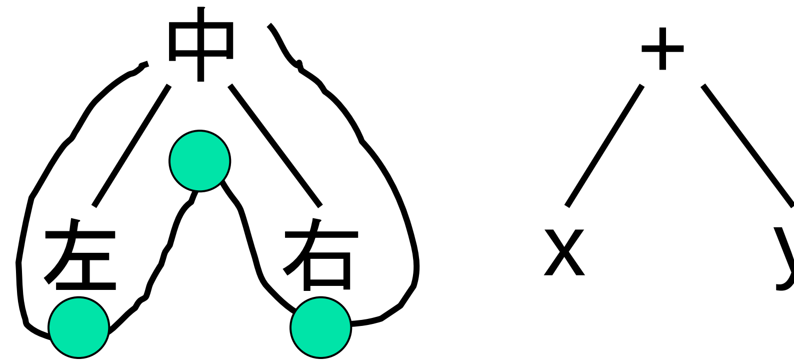
節点の左を通過したときに書き出す



中置記法：左→中→右

x+y

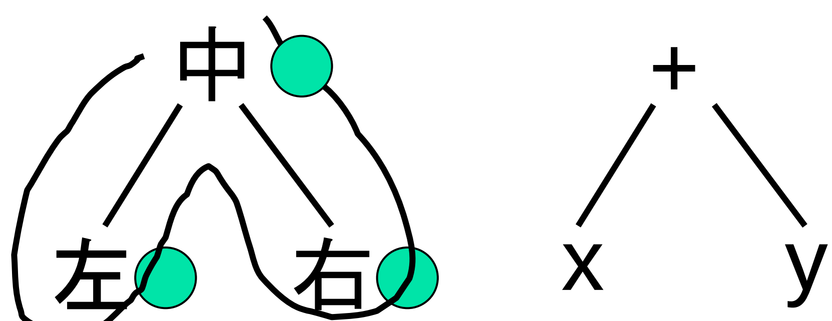
節点の下を通過したときに書き出す



後置記法：左→右→中

xy+

節点の右を通過したときに書き出す



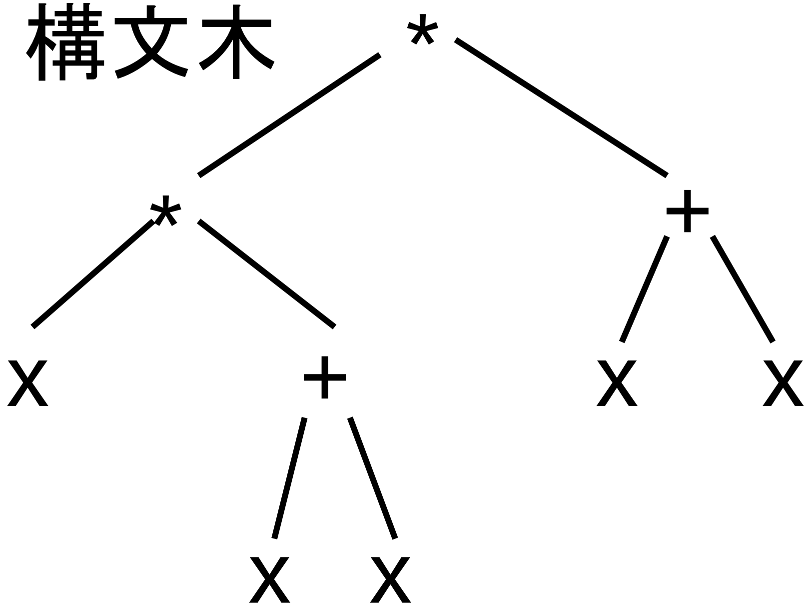
例題3.71 (1)

計算順序を見やすくするため括弧を追加

後置記法：xxx+*xx+*

((x(xx+)*)(xx+)*)

構文木



前置記法：**x+xx+xx　中置記法：(x*(x+x))*(x+x)

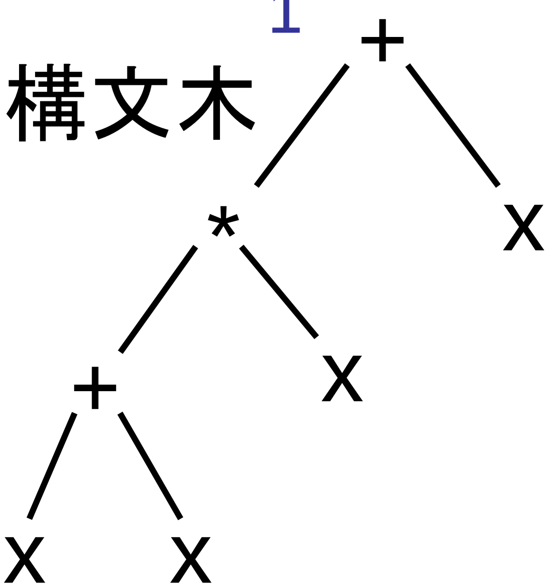
例題3.71 (2)

中置記法:x+x*x+x

5種類の構文木

構文木

1

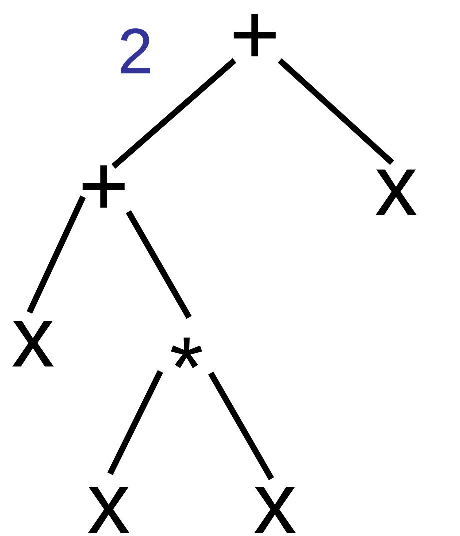


(((x+x)*x)+x)

前:+*+xxxx

後:xx+x*x+

2

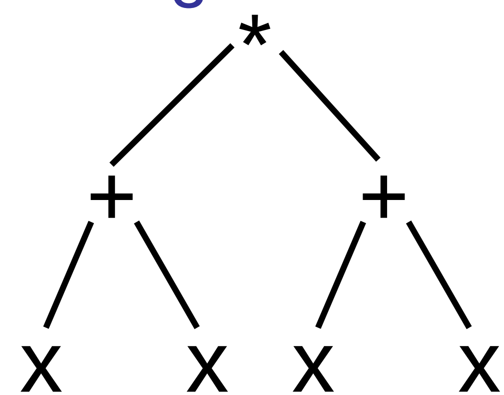


(x+(x*x))+x

前:++x*xxx

後:xxx*+x+

3



(x+x)*(x+x)

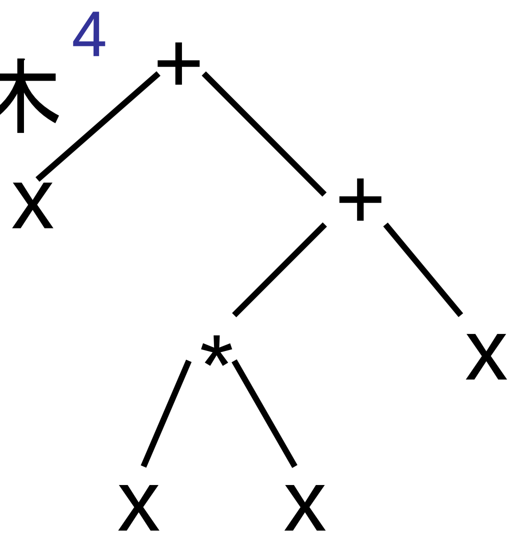
前:*+xx+xx

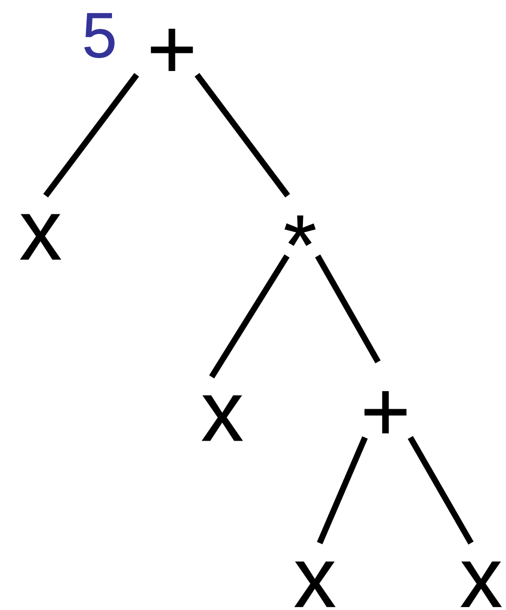
後:xx+xx+*

例題3.71 (3)

中置記法 : x+x*x+x

構文木





x+((x*x)+x)

前 : +x+*xxx
後 : xxx*x++

x+(x*(x+x))

前 : +x*x+xx
後 : xxxx+*+

今回のまとめ

- （離散）グラフ
- 多重グラフ
- 単純グラフ
- 連結グラフ
- （コンピュータで扱う場合の）グラフの表現
- （完全｜正則｜２部｜木）グラフ
- 同型グラフ
- 補グラフ
- 構文木

今回の宿題

- 演習問題1，2，3
- グラフの説明内の用語を覚える
- 集合表現⇔隣接行列⇔隣接リスト
  - 表現を変換し表示するプログラムの作成