オートマトンと言語
11回目　6月20日（水）

4章　DFAの最小化

授業資料
http://ir.cs.yamanashi.ac.jp/~ysuzuki/public/automaton/

授業の予定（中間試験まで）

回数	月日	内容
1	4月11日	オートマトンとは，オリエンテーション
2	4月18日	2章（数式の記法，スタック，BNF）
3	4月25日	2章（BNF），3章（グラフ）
4	5月02日	3章（グラフ）
5	5月09日	4章　有限オートマトン1
6	5月16日	有限オートマトン2　2･3章の小テスト
7	5月23日	正規表現
8	5月30日	正規表現，非決定性有限オートマトン
9	6月06日	中間試験，前半のまとめ

出張などにより，授業日が変更になる場合があります．

授業の予定

回数	月日	内容
10	6月13日	NFA→DFA
11	6月20日	DFAの最小化
12	6月27日	DFAの最小化，有限オートマトンの応用
13	7月04日	プッシュダウンオートマトン，チューリング機械
14	7月11日	形式言語理論，文脈自由文法
15	7月18日	期末試験，まとめ

出張などにより，授業日が変更になる場合があります．

山梨大学 プログラミングコンペティション

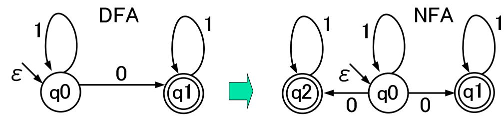
- http://www.cs.yamanashi.ac.jp/progcomp11/
- 部門：
  - 初級者部門（KM1･2年生）
  - 一般部門
- スケジュール：
  - 06月15日　課題発表（既に発表済み）
  - 07月15日　応募締め切り
  - 10月21日　解答締め切り
  - 11月07日　成績発表
  - 11月16日　表彰式（優秀者には豪華（！？）な副賞も）

今日のメニュー

- ε動作を含むNFA→ε動作を含まないNFA
- 正規表現→ ε動作を含むNFA
- 同値類
- DFAの最小化

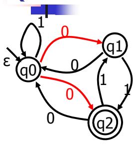
4.4.2 非決定性FAの決定性FAへの変換(p.107)

- あるDFAで受理できる言語を受理するNFAは簡単に構成できる（DFA→NFAは簡単）



- NFA→DFAは可能か？
  - 可能（変換方法は後で説明）

例題4.33 例題4.30のNFAの受理する言語を受理するDFAを構成せよ(NFA→DFA)

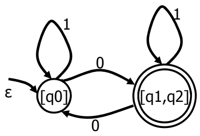


δ_N	0	1
q0	{q1,q2}	{q0}
q1	{q0}	{q2}
q2	{q0}	{q1}

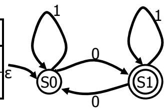
DFA化 →

δ_D	0	1
[q0]	[q1,q2]	[q0]
[q1,q2]	[q0]	[q1,q2]

[ ]: 状態集合ラベル



← 状態ラベルの付換え

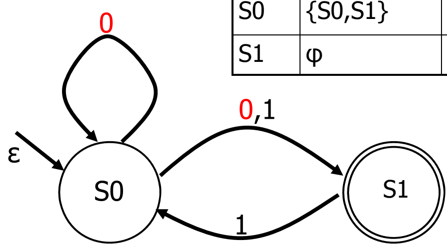


δ_D	0	1
S0	S1	S0
S1	S0	S1

例題4.35 (例題4.29)

NFA → DFA

δ	0	1
S0	{S0,S1}	{S1}
S1	φ	{S0}



例題4.35 (例題4.29)の答え

重要！

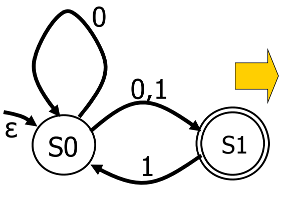
δ_{NFA}	0	1
S0 初期状態	{S0,S1}	{S1}
S1	φ	{S0}

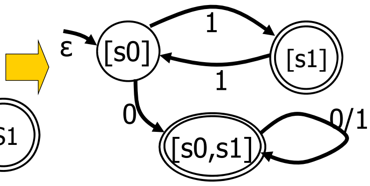
初期状態からの遷移を調べる

各遷移先からの遷移を調べる

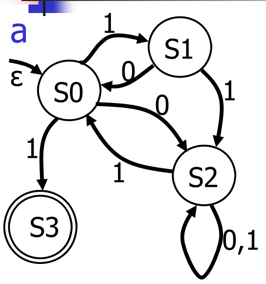
新しい遷移先が無ければ終了

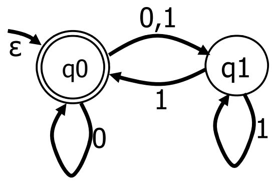
δ_{DFA}	0	1
[s0] 初期状態	[s0,s1]	[s1]
[s0,s1]	[s0,s1]	[s0,s1]
[s1]	----	[s0]



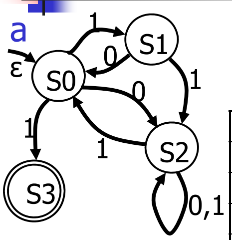


練習問題3
例題4.36 a, f





練習問題3 例題4.36 aの答え 1/2



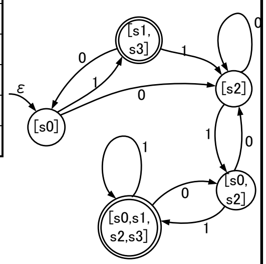
δNFAa	0	1
S0 初期状態	{S2}	{S1,S3}
S1	{S0}	{S2}
S2	{S2}	{S0,S2}
S3	φ	φ

δDFAa	0	1
[s0] 初期状態	[s2]	[s1,s3]
[s2]	[s2]	[s0,s2]
[s1,s3]	[s0]	[s2]
[s0,s2]	[s2]	[s0,s1,s2,s3]
[s0,s1,s2,s3]	[s0,s2]	[s0,s1,s2,s3]

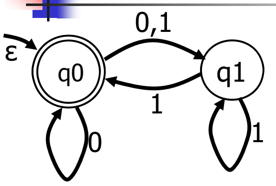
前回はここまで

練習問題3
例題4.36 aの答え 2/2

δDFAa	0	1
[s0]	[s2]	[s1,s3]
[s2]	[s2]	[s0,s2]
[s1,s3]	[s0]	[s2]
[s0,s2]	[s2]	[s0,s1,s2,s3]
[s0,s1,s2,s3]	[s0,s2]	[s0,s1,s2,s3]



練習問題3
例題4.36　fの答え 1/2

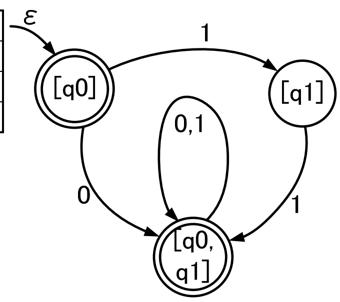


δNFAf	0	1
q0	{q0,q1}	{q1}
q1	φ	{q0,q1}

δDFAf	0	1
[q0]	[q0,q1]	[q1]
[q1]	-----	[q0,q1]
[q0,q1]	[q0,q1]	[q0,q1]

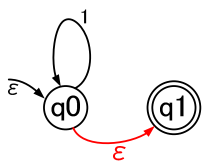
練習問題3
例題4.36　fの答え 2/2

δDFAf	0	1
[q0]	[q0,q1]	[q1]
[q1]	-----	[q0,q1]
[q0,q1]	[q0,q1]	[q0,q1]



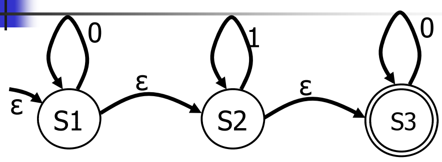
4.4.3 ε- 動作を含むNFA

- 空語入力による遷移　→ ε-遷移
- ε-NFAの状態遷移関数の定義
  - δ:Q×(Σ+{ε})→P(Q)



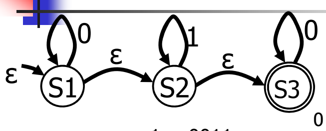
δ	1	ε
q0	{q0}	{q1}
q1	φ	φ

練習問題1
例題4.37



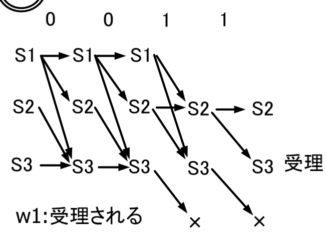
W1: 0011
W2: 01001

練習問題1
例題4.37 w1 答え



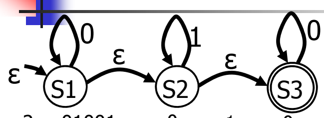
w1 = 0011

δ	0	1	ε
S1	{S1}	φ	{S2}
S2	φ	{S2}	{S3}
S3	{S3}	φ	φ

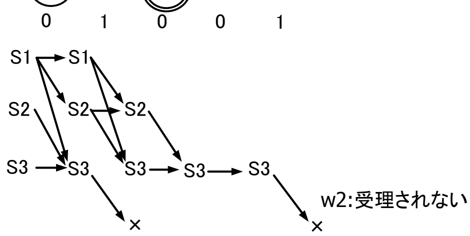


練習問題1
例題4.37　w2 答え

δ	0	1	ε
S1	{S1}	φ	{S2}
S2	φ	{S2}	{S3}
S3	{S3}	φ	φ

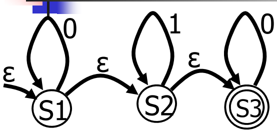


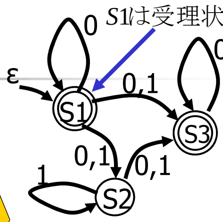
w2 = 01001



例題4.38 ε-動作の除去

$\varepsilon(S1) \cap F \neq \phi$の時 $S1$は受理状態



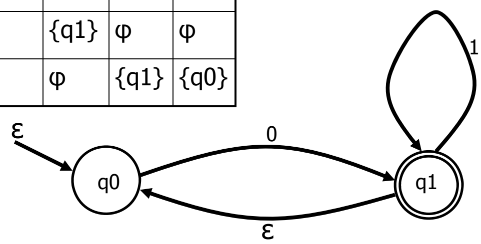


$\delta_{\varepsilon\text{-NFA}}$	0	1	ε
S1	{S1}	φ	{S2}
S2	φ	{S2}	{S3}
S3	{S3}	φ	φ

δ_{NFA}	0	1
S1	{S1,S2,S3}	{S2,S3}
S2	{S3}	{S2,S3}
S3	{S3}	φ

練習問題2 例題4.40 a

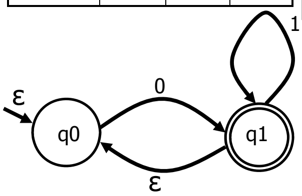
$\delta_{\varepsilon\text{-NFA}}$	0	1	ε
q0	{q1}	φ	φ
q1	φ	{q1}	{q0}

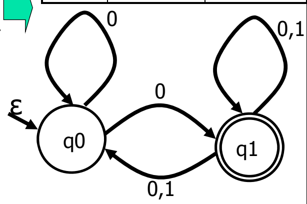


練習問題2 例題4.40 a 答え

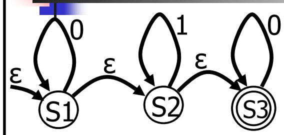
$\delta_{\varepsilon\text{-NFA}}$	0	1	ε
q0	{q1}	φ	φ
q1	φ	{q1}	{q0}

δ_{NFA}	0	1
q0	{q0,q1}	φ
q1	{q0,q1}	{q0,q1}





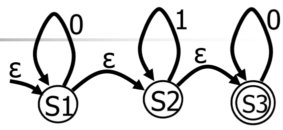
例題4.41 (p.112) ε-NFA→DFA



$\delta_{\varepsilon\text{-NFA}}$	0	1	ε
S1	{S1}	φ	{S2}
S2	φ	{S2}	{S3}
S3	{S3}	φ	φ

例題4.41 1/2 ε-NFA → NFA → DFA

$\delta_{\varepsilon\text{-NFA}}$	0	1	ε
S1	{S1}	φ	{S2}
S2	φ	{S2}	{S3}
S3	{S3}	φ	φ



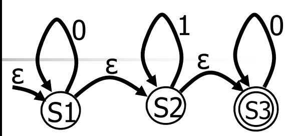
例題4.38

δ_{NFA}	0	1
S1	{S1,S2,S3}	{S2,S3}
S2	{S3}	{S2,S3}
S3	{S3}	φ

δ_{DFA}	0	1
[S1]	[S1,S2,S3]	[S2,S3]
[S1,S2,S3]	[S1,S2,S3]	[S2,S3]
[S2,S3]	[S3]	[S2,S3]
[S3]	[S3]	---

例題4.41 2/2 ε-NFA → NFA → DFA

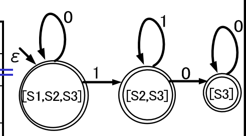
δ_{DFA}	0	1
[S1]	[S1,S2,S3]	[S2,S3]
[S1,S2,S3]	[S1,S2,S3]	[S2,S3]
[S2,S3]	[S3]	[S2,S3]
[S3]	[S3]	---



S1の ε-閉包

初期状態をε(S1)と考えると

	δ_{DFA}	0	1
	~~[S1]~~	~~[S1,S2,S3]~~	~~[S2,S3]~~
ε(S1)	[S1,S2,S3]	[S1,S2,S3]	[S2,S3]
ε(S2)	[S2,S3]	[S3]	[S2,S3]
ε(S3)	[S3]	[S3]	---



4.4.4 正規表現で表された言語を受理するε-NFA

- (1) 正規言語の閉包性
  - 正規言語：FAの受理する言語，あるいは正規表現の表す言語のクラス
  - 正規言語は言語の和，連接，クリーネ閉包(Σ*)について閉じている
  - 正規言語は和，積，補の集合演算についても閉じている

閉じている：教科書8ページ
クリーネ閉包：教科書33ページ
連接：教科書34ページ

アルファベットΣの文字から構成される全ての語の集合

(2)正規表現からε-NFAへの変換

- 113ページ

正規表現から直接DFAへの変換は難しい
→ まずε-NFAに変換する．

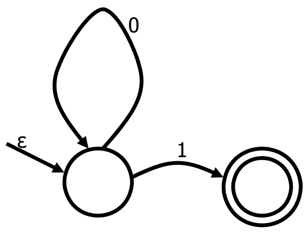
P.114　　P.110　　P.108

正規表現 ➡ ε −NFA ⇨ NFA ⇨ DFA

重要！

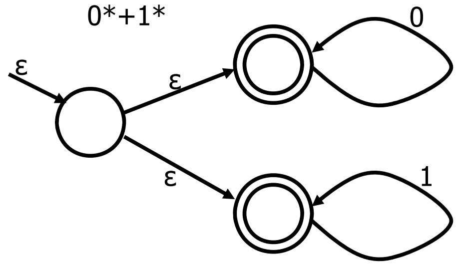
例題4.45 c :0*1
正規表現 → ε-NFAの状態遷移図

0*1



例題4.45 h :0*+1*
正規表現 → ε-NFAの状態遷移図

0*+1*

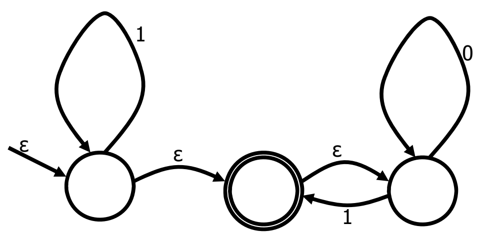


練習問題3
例題4.47 a

- 1*(0*1)*
- 正規表現 → ε-NFAの状態遷移図

練習問題3 例題4.47 a 答え

- 1*(0*1)*
- 正規表現 → ε-NFAの状態遷移図



重要！

正規表現→DFAの最小化

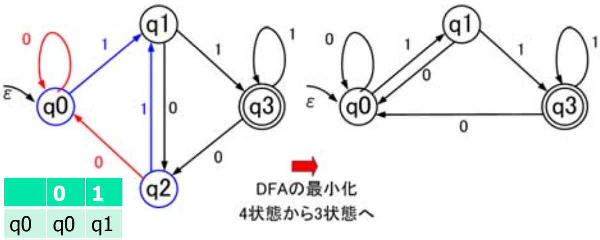
P.114 P.110 P.108 P.121

正規表現 ⇒ ε−NFA ⇒ NFA ⇒ DFA ➡ DFAの最小化

4.4.5 Myhill-Nerodeの定理と有限オートマトンの最小化

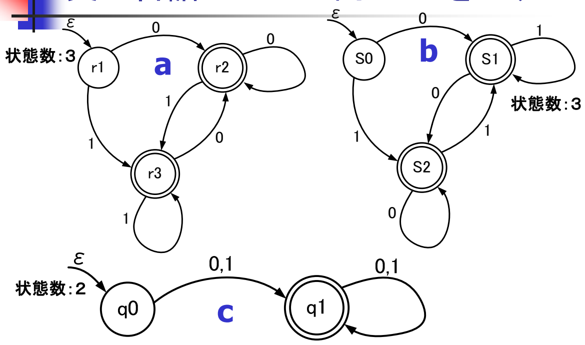
- DFAの最小化

→あるDFAを対等な状態数最小のDFAに変換

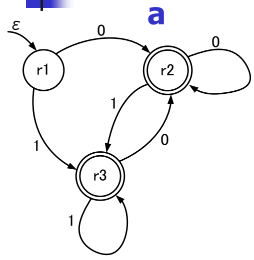


	0	1
q0	q0	q1
q2	q0	q1

練習問題4 例題4.50
受理言語が互いに同じことを示す



練習問題4 例題4.50
aが受理する言語の正規表現



$a)\ r_1=\varepsilon$ (1)

$r_2=r_10+r_20+r_30$ (2)

$r_3=r_11+r_21+r_31$ (3)

(1)を(2),(3)に代入

$r_2=0+r_20+r_30$ (4)

$r_3=1+r_21+r_31$ (5)

(4)と(5)から

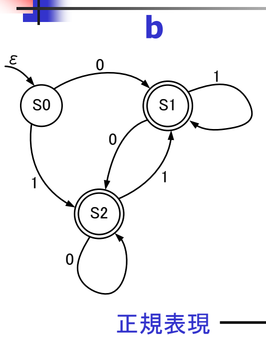
$r_2+r_3=0+r_20+r_30+1+r_21+r_31$ (6)

$=0+1+(r_2+r_3)(0+1)$

98ページの式(4.7) より

正規表現 ⟶ $=(0+1)(0+1)^*$

練習問題4 例題4.50
bが受理する言語の正規表現



$b)\ s_0=\varepsilon$ (1)

$s_1=s_00+s_11+s_21$ (2)

$s_2=s_01+s_10+s_20$ (3)

(1)を(2),(3)に代入

$s_1=0+s_11+s_21$ (4)

$s_2=1+s_10+s_20$ (5)

(4)と(5)から

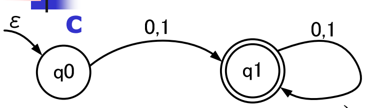
$s_1+s_2=0+s_11+s_21+1+s_10+s_20$ (6)

$=0+1+(s_1+s_2)(0+1)$

98ページの式(4.7)より

正規表現 ⟶ $=(0+1)(0+1)^*$

練習問題4 例題4.50
cが受理する言語の正規表現



$c)q_0=\varepsilon$ (1)

$q_1=q_0(0+1)+q_1(0+1)$ (2)

(1)を(2)に代入

$q_1=(0+1)+q_1(0+1)$

98ページの式(4.7)より

正規表現 ⟶ $q_1=(0+1)(0+1)^*$

練習問題4　例題4.50 の答え

ここまで

- a,b,cとも正規表現は(0+1)(0+1)*→受理言語が同じ

$a)\ r_1 = \varepsilon$ (1)
$r_2 = r_1 0 + r_2 0 + r_3 0$ (2)
$r_3 = r_1 1 + r_2 1 + r_3 1$ (3)
(1)を(2),(3)に代入
$r_2 = 0 + r_2 0 + r_3 0$ (4)
$r_3 = 1 + r_2 1 + r_3 1$ (5)
(4)と(5)から
$r_2 + r_3 = 0 + r_2 0 + r_3 0 + 1 + r_2 1 + r_3 1$ (6)
$= 0 + 1 + (r_2 + r_3)(0+1)$
98ページの式(4.7) より
$= (0+1)(0+1)*$

$b)\ s_0 = \varepsilon$ (1)
$s_1 = s_0 0 + s_1 1 + s_2 1$ (2)
$s_2 = s_0 1 + s_1 0 + s_2 0$ (3)
(1)を(2),(3)に代入
$s_1 = 0 + s_1 1 + s_2 1$ (4)
$s_2 = 1 + s_1 0 + s_2 0$ (5)
(4)と(5)から
$s_1 + s_2 = 0 + s_1 1 + s_2 1 + 1 + s_1 0 + s_2 0$ (6)
$= 0 + 1 + (s_1 + s_2)(0+1)$
98ページの式(4.7) より
$= (0+1)(0+1)*$

$c)\ q_0 = \varepsilon$ (1)
$q_1 = q_0(0+1) + q_1(0+1)$ (2)
(1)を(2)に代入
$q_1 = (0+1) + q_1(0+1)$
98ページの式(4.7) より
$q_1 = (0+1)(0+1)*$

同値関係（6ページを参照）

関係Rが以下の3つの性質を持つとき，Rは同値関係

反射的 ： 任意の $x \in A$に対し，xRx

対称的 ： 任意の $x, y \in A$に対し，xRyならばyRx

推移的 ： 任意の $x, y, z \in A$に対し，xRyかつyRzならばxRz

同値関係　R_M

$x, y \in \Sigma^*$に対し，$xR_M y :\Leftrightarrow \delta(S, x) = \delta(S, y) = q_i$は同値関係

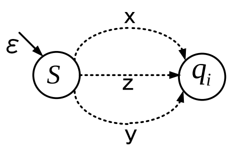
R_Mが同値関係 → 反射律，対称律，推移律を満たす．

反射律：任意の$x \in \Sigma^*$に対し，$xR_M x$

対称律：任意の$x, y \in \Sigma^*$に対し，$xR_M y$ならば$yR_M x$

推移律：任意の$x, y, z \in \Sigma^*$に対し，$xR_M y$かつ$yR_M z$ならば$xR_M z$

R_M :同値関係
x, y :同値
同値類:同値の集合
q_bで受理される語の集合 → 同値類



同値類

R：集合Aにおける同値関係とする
ある2つの要素$a, b \in A$が$(a, b) \in R$であるとき
aはbと同値

aの同値類　$[a]$　：aと同値な要素の集合
Aは同値類に直和分割される．

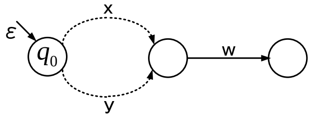
直和：　$A \cap B = \phi$であるような集合A, Bの和集合

右不変同値関係　R_M

同値関係RにおいてxRyならば$xzRyz$という性質があるとき，
Rは（連接に関して）右不変な関係

$xR_M y$：任意の$x, y \in \sum *$において$xR_M y$ならば，
任意の$w \in \sum *$に対し，　$xwR_M yw$

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y) = q_b$ならば
$\delta(\delta(q_0, x), z) = \delta(q_b, z) = \delta(\delta(q_0, y), z)$
R_Mは右不変同値関係

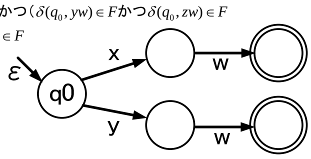


右不変同値関係　R_L

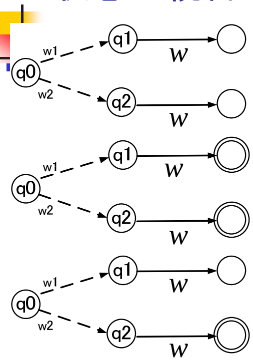
同値関係RにおいてxRyならば$xzRyz$という性質があるとき，Rは（連接に関して）右不変な関係

$xR_L y$：任意の$x, y \in \sum$ において，任意の$w \in \sum *$に対し，
$\delta(q_0, xw) \in F$かつ$\delta(q_0, yw) \in F$または$\delta(q_0, xw) \notin F$かつ$\delta(q_0, yw) \notin F$
（xw, ywともにLに属すか，ともに属さない）

反射律　$xR_L x$　を満たす
対称律　$\delta(q_0, xw) \in F$かつ$\delta(q_0, yw) \in F$ならば$\delta(q_0, yw) \in F$かつ$\delta(q_0, xw) \in F$
$\notin F$の時も同様
$xR_L y$ならば$yR_L x$を満たす
推移律　（$\delta(q_0, xw) \in F$かつ$\delta(q_0, yw) \in F$）かつ（$\delta(q_0, yw) \in F$かつ$\delta(q_0, zw) \in F$
ならば$\delta(q_0, xw) \in F$かつ$\delta(q_0, zw) \in F$
$\notin F$の時も同様
$xR_L y$かつ$yR_L z$ならば$xR_L z$
RLは右不変性を持つ
R_Lは右不変同値関係



状態の統合



$\forall w \quad \delta(q2, w) \notin F$ かつ $\delta(q1, w) \notin F$

q1とq2は統合可能

$\forall w \quad \delta(q2, w) \in F$ かつ $\delta(q1, w) \in F$

q1とq2は統合可能

$\exists w \quad \delta(q1, w) \notin F$ かつ $\delta(q2, w) \in F$

q1とq2は統合不可能

今日のまとめ

- ε動作を含むNFA→ε動作を含まないNFA
- 正規表現→ ε動作を含むNFA
- 同値類
- DFAの最小化