

## オートマトンと言語 12回目 6月27日(水)

4章 DFAの最小化, 有限オートマトンの応用

授業資料

<http://ir.cs.yamanashi.ac.jp/~ysuzuki/public/automaton/>

## 授業の予定(中間試験まで)

回数	月日	内容
1	4月11日	オートマトンとは, オリエンテーション
2	4月18日	2章(数式の記法, スタック, BNF)
3	4月25日	2章(BNF), 3章(グラフ)
4	5月02日	3章(グラフ)
5	5月09日	4章 有限オートマトン1
6	5月16日	有限オートマトン2 2・3章の小テスト
7	5月23日	正規表現
8	5月30日	正規表現, 非決定性有限オートマトン
9	6月06日	中間試験, 前半のまとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります。

## 授業の予定

回数	月日	内容
10	6月13日	NFA→DFA
11	6月20日	DFAの最小化
12	6月27日	DFAの最小化, 有限オートマトンの応用
13	7月04日	プッシュダウンオートマトン, チューリング機械
14	7月11日	形式言語理論, 文脈自由文法
15	7月18日	期末試験, まとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります。

## 山梨大学

## プログラミングコンペティション

- <http://www.cs.yamanashi.ac.jp/progcomp11/>
- 部門:
  - 初級者部門(KM1・2年生)
  - 一般部門
- スケジュール:
  - 06月15日 課題発表(既に発表済み)
  - 07月15日 応募締め切り
  - 10月21日 解答締め切り
  - 11月07日 成績発表
  - 11月16日 表彰式(優秀者には豪華(!?)な副賞も)

## 今日のメニュー

- 同値類
- DFAの最小化
- 有限オートマトンの応用

## 同値関係(6ページを参照)

関係 $R$ が以下の3つの性質を持つとき,  $R$ は同値関係

反射的 : 任意の  $x \in A$  に対し,  $xRx$

対称的 : 任意の  $x, y \in A$  に対し,  $xRy$  ならば  $yRx$

推移的 : 任意の  $x, y, z \in A$  に対し,  $xRy$  かつ  $yRz$  ならば  $xRz$

## 同値関係 $R_M$

$x, y \in \Sigma^*$  に対し,  $xR_M y \Leftrightarrow \delta(S, x) = \delta(S, y) = q_i$  は同値関係

$R_M$  が同値関係  $\rightarrow$  反射律, 対称律, 推移律を満たす.

反射律: 任意の  $x \in \Sigma^*$  に対し,  $xR_M x$

対称律: 任意の  $x, y \in \Sigma^*$  に対し,  $xR_M y$  ならば  $yR_M x$

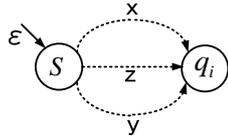
推移律: 任意の  $x, y, z \in \Sigma^*$  に対し,  $xR_M y$  かつ  $yR_M z$  ならば  $xR_M z$

$R_M$ : 同値関係

$x, y$ : 同値

同値類: 同値の集合

$q_b$  で受理される語の集合  $\rightarrow$  同値類



## 同値類

$R$ : 集合  $A$  における同値関係とする

ある2つの要素  $a, b \in A$  が  $(a, b) \in R$  であるとき  $a$  は  $b$  と同値

$a$  の同値類  $[a]$ :  $a$  と同値な要素の集合  
 $A$  は同値類に直和分割される.

直和:  $A \cap B = \emptyset$  であるような集合  $A, B$  の和集合

## 右不変同値関係 $R_M$

同値関係  $R$  において  $xRy$  ならば  $xzRyz$  という性質があるとき,

$R$  は (接続に関して) 右不変な関係

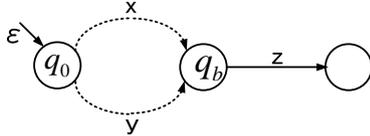
$xR_M y$ : 任意の  $x, y \in \Sigma^*$  において  $xR_M y$  ならば,

任意の  $w \in \Sigma^*$  に対し,  $xwR_M yw$

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y) = q_b$  ならば

$\delta(\delta(q_0, x), z) = \delta(q_b, z) = \delta(\delta(q_0, y), z)$

$R_M$  は右不変同値関係



## 右不変同値関係 $R_L$

同値関係  $R$  において  $xRy$  ならば  $xzRyz$  という性質があるとき,  $R$  は (接続に関して) 右不変な関係

$xR_L y$ : 任意の  $x, y \in \Sigma^*$  において, 任意の  $w \in \Sigma^*$  に対し,

$\delta(q_0, xw) \in F$  かつ  $\delta(q_0, yw) \in F$  または  $\delta(q_0, xw) \notin F$  かつ  $\delta(q_0, yw) \notin F$   
 $(xw, yw)$  ともに  $L$  に属するか, ともに属さない)

反射律  $xR_L x$  を満たす

対称律  $\delta(q_0, xw) \in F$  かつ  $\delta(q_0, yw) \in F$  ならば  $\delta(q_0, yw) \in F$  かつ  $\delta(q_0, xw) \in F$   
 $\notin F$  の時も同様

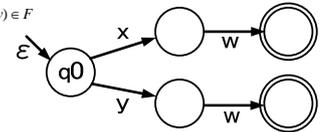
$xR_L y$  ならば  $yR_L x$  を満たす

推移律  $(\delta(q_0, xw) \in F$  かつ  $\delta(q_0, yw) \in F)$  かつ  $(\delta(q_0, yw) \in F$  かつ  $\delta(q_0, zw) \in F)$   
 ならば  $\delta(q_0, xw) \in F$  かつ  $\delta(q_0, zw) \in F$   
 $\notin F$  の時も同様

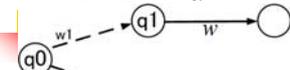
$xR_L y$  かつ  $yR_L z$  ならば  $xR_L z$

$R_L$  は右不変性を持つ

$R_L$  は右不変同値関係

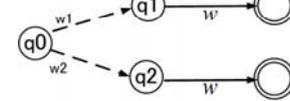


## 状態の統合



$\forall w, \delta(q_2, w) \in F$  かつ  $\delta(q_1, w) \in F$   
 または  $\delta(q_2, w) \notin F$  かつ  $\delta(q_1, w) \notin F$

$\rightarrow q_1$  と  $q_2$  は統合可能



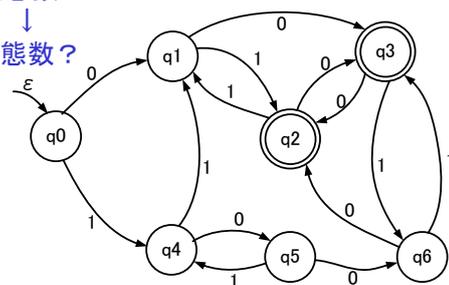
$\exists w, \delta(q_1, w) \notin F$  かつ  $\delta(q_2, w) \in F$   
 $\rightarrow q_1$  と  $q_2$  は統合不可能

## 例題4.57

■ 図4.25の状態遷移図で示されるDFAを最小化せよ

■ DFAの最小化  $\rightarrow$  受理言語を変えずに  
 状態数を7  
 状態数を最小にする

状態数?



重要!

### 例題4.57 ①, ②

q0	○		×	×			
q1		○	×	×			
q2	×	×	○		×	×	×
q3	×	×		○	×	×	×
q4			×	×	○		
q5			×	×		○	
q6			×	×			○
	q0	q1	q2	q3	q4	q5	q6

q2とq3: 受理状態,  
q0,q1,q4,q5,q6: 非受理状態

○: 統合可能  
×: 統合不可能  
空欄: 調査中

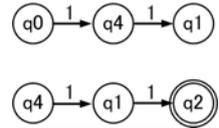
13

### 例題4.57 ③-1

状態の組: 0による遷移とその結果, 1による遷移とその結果⇒同値評価

$(r_0, r_1): (r_0, r_1) = (r_1, r_2) \times, (r_0, r_1) = (r_4, r_2) \times \Rightarrow \times$   
 $(r_0, r_4): (r_0, r_4) = (r_1, r_5), (r_0, r_4) = (r_4, r_1) \Rightarrow$  保留a ×  
 $(r_0, r_5): (r_0, r_5) = (r_1, r_6), (r_0, r_5) = (r_4, r_4) \circ \Rightarrow$  保留b  
 $(r_0, r_6): (r_0, r_6) = (r_1, r_2) \times, (r_0, r_6) = (r_4, r_5) \times \Rightarrow \times$   
 $(r_1, r_4): (r_1, r_4) = (r_5, r_3) \times, (r_1, r_4) = (r_5, r_1) \times \Rightarrow \times, \dots$  aも×

● 受理状態

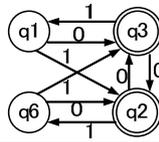


### 例題4.57 ③-2

状態の組: 0による遷移とその結果, 1による遷移とその結果⇒同値評価

$(r_1, r_5): (r_1, r_5) = (r_3, r_6) \times, (r_1, r_5) = (r_2, r_4) \times \Rightarrow \times$   
 $(r_1, r_6): (r_1, r_6) = (r_5, r_2), (r_1, r_6) = (r_5, r_3) \Rightarrow$  保留c  
 $(r_2, r_3): (r_2, r_3) = (r_3, r_5), (r_2, r_3) = (r_6, r_1) \Rightarrow$  保留d  
 $(r_4, r_5): (r_4, r_5) = (r_5, r_6), (r_4, r_5) = (r_1, r_4) \times \Rightarrow \times$   
 $(r_4, r_6): (r_4, r_6) = (r_5, r_2) \times, (r_4, r_6) = (r_1, r_3) \times \Rightarrow \times$   
 $(r_5, r_6): (r_5, r_6) = (r_6, r_5) \times, (r_5, r_6) = (r_4, r_3) \times \Rightarrow \times$

● 受理状態

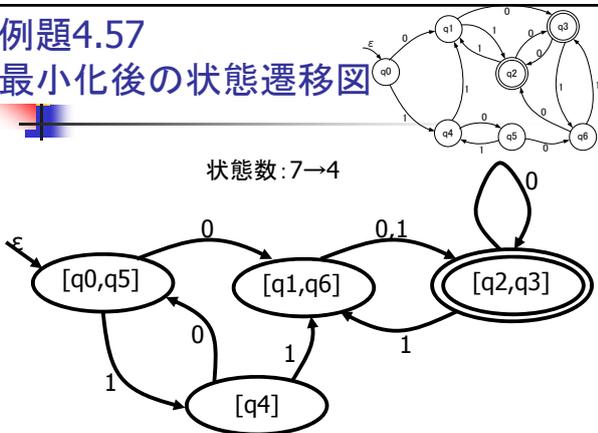


### 例題4.57 ④

q0	○	×	×	×	×	○	×
q1	×	○	×	×	×	×	○
q2	×	×	○	○	×	×	×
q3	×	×	○	○	×	×	×
q4	×	×	×	×	○	×	×
q5	○	×	×	×	×	○	×
q6	×	○	×	×	×	×	○
	q0	q1	q2	q3	q4	q5	q6

16

### 例題4.57 最小化後の状態遷移図



17

### 例題4.60 (01\*+1\*0)\*

正規表現

→ε-NFA

→NFA

→DFA

→最小化DFA

### 例題4.60 $(01^*+1^*0)^*$

正規表現 $\rightarrow$  $\epsilon$ -NFA  
教科書p.113

19

### 例題4.60 $(01^*+1^*0)^*$

$\epsilon$ -NFA  $\rightarrow$  NFA  
教科書p.110

NFA	0	1
q0	{q0,q1,q2}	{q2}
q1	{q0,q1,q2}	{q0,q1,q2}
q2	{q0,q2}	{q2}

$\epsilon$ -NFA	0	1	$\epsilon$
{q0}	{q1}	--	{q2}
{q1}	--	{q1}	{q0}
{q2}	{q0}	{q2}	--

20

### 例題4.60 $(01^*+1^*0)^*$

NFA  $\rightarrow$  DFA  
教科書p.108

NFA	0	1
q0	{q0,q1,q2}	{q2}
q1	{q0,q1,q2}	{q0,q1,q2}
q2	{q0,q2}	{q2}

DFA	0	1
[q0]	[q0,q1,q2]	[q2]
[q0,q1,q2]	[q0,q1,q2]	[q0,q1,q2]
[q2]	[q0,q2]	[q2]
[q0,q2]	[q0,q1,q2]	[q2]

21

### 例題4.60 $(01^*+1^*0)^*$

DFAのラベルの付換え  
教科書p.121

DFA	0	1
[q0]	[q0,q1,q2]	[q2]
[q0,q1,q2]	[q0,q1,q2]	[q0,q1,q2]
[q2]	[q0,q2]	[q2]
[q0,q2]	[q0,q1,q2]	[q2]

DFA	0	1
S0	S1	S2
S1	S1	S1
S2	S3	S2
S3	S1	S2

S0:[q0]  
S1:[q0,q1,q2]  
S2:[q2]  
S3:[q0,q2]

ラベルの付換え

22

### 例題4.60 $(01^*+1^*0)^*$

DFA  $\rightarrow$  DFAの最小化  
教科書p.121

(r0,r1): (r0-0, r1-0)=(r1,r1)O, (r0-1, r1-1)=(r2,r1)X  
 (r0,r3): (r0-0, r3-0)=(r1,r1)O, (r0-1, r3-1)=(r2,r2)O  
 (r1,r3): (r1-0, r3-0)=(r1,r1)O, (r1-1, r3-1)=(r1,r2)X

	s0	s1	s2	s3
s0	O	X	X	O
s1	X	O	X	X
s2	X	X	O	X
s3	O	X	X	O

	0	1
[S0,S3]	[S1]	[S2]
S1	[S1]	[S1]
S2	[S0,S3]	[S2]

23

### 例題4.60の答え $(01^*+1^*0)^*$

24

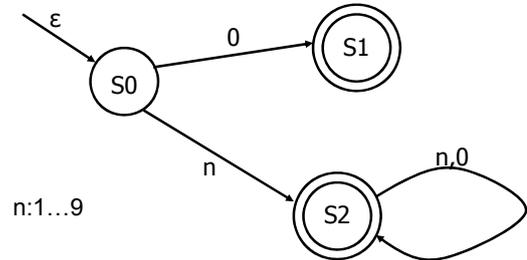
## 4.4.6 有限オートマトンの応用

- 普段お世話になっているコンパイラはどんな作業をしているのだろうか。

25

### 例題4.63

■ 入力された記号列が0または正の整数値かどうかを判断するFAを構成せよ



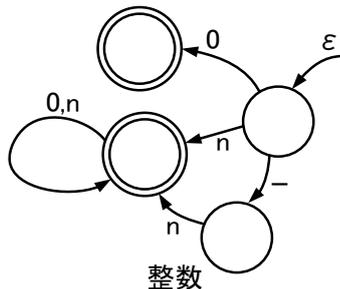
26

### 例題4.64

#### 整数値かどうか

○: 0, 1003, -20  
×: 02, -0

n: 1...9

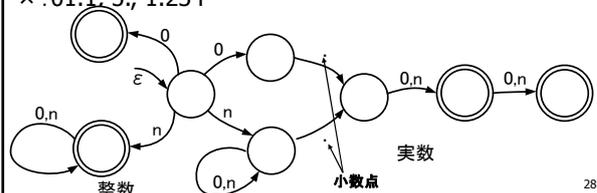


27

### 例題4.65

$\Sigma = \{0, n, .\}$ 上の語について、入力された語が整数あるいは小数点2桁以内の非負の実数値の表現となっているかどうかを判断するFAを構成せよ。nは1~9の数字を表す。

○: 0.11, 123.1, 1.0  
×: 01.1, 5., 1.234



28

### 練習問題1 例題4.66

$\Sigma = \{0, n, ., -\}$ 上の語について、入力された語が整数あるいは実数の表現となっているかどうかを判断するFAを構成せよ。nは1~9の数字を表す。

○: 51, 0.11, 123.1, 1.0, -0.9, -10.30, -1.3333333  
×: 01.1, 5., -01.2, -.2

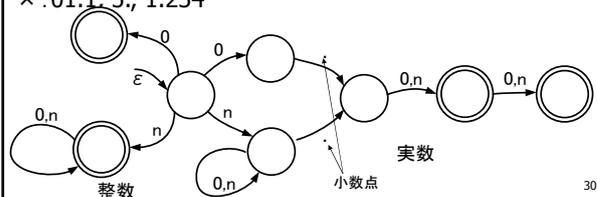
29

### 例題4.66の手がかり

#### 例題4.65

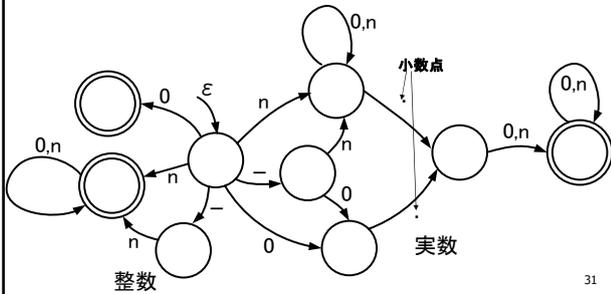
$\Sigma = \{0, n, .\}$ 上の語について、入力された語が整数あるいは小数点2桁以内の非負の実数値の表現となっているかどうかを判断するFAを構成せよ。nは1~9の数字を表す。

○: 0.11, 123.1, 1.0  
×: 01.1, 5., 1.234



30

### 練習問題1 例題4.66の答え



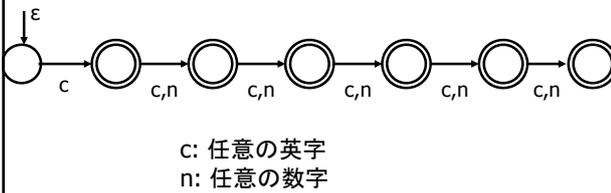
### 練習問題2 例題4.67 FORTRAN, C言語の変数名

FORTRANの変数名  
英字から始まる6文字以内の英数字列

C言語の変数名  
英字から始まる任意長の英数字列

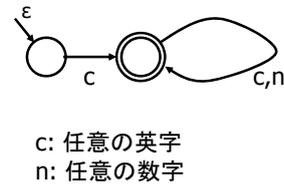
### 練習問題2 例題4.67の答え FORTRAN

英字から始まる6文字以内の英数字



### 練習問題2 例題4.67の答え C言語

英字から始まる任意長の英数字



### 今日のまとめ

- ε動作を含むNFA → ε動作を含まないNFA
- 正規表現 → ε動作を含むNFA
- 同値類
- DFAの最小化
- 有限オートマトンの応用