

オートマトンと言語

14回目 7月11日(水)

- 4章 チューリング機械
- 5章 文脈自由文法

授業資料

<http://ir.cs.yamanashi.ac.jp/~ysuzuki/public/automaton/>

授業の予定(中間試験まで)

回数	月日	内容
1	4月11日	オートマトンとは, オリエンテーション
2	4月18日	2章(数式の記法, スタック, BNF)
3	4月25日	2章(BNF), 3章(グラフ)
4	5月02日	3章(グラフ)
5	5月09日	4章 有限オートマトン1
6	5月16日	有限オートマトン2 2・3章の小テスト
7	5月23日	正規表現
8	5月30日	正規表現, 非決定性有限オートマトン
9	6月06日	中間試験, 前半のまとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります。

授業の予定

回数	月日	内容
10	6月13日	NFA→DFA
11	6月20日	DFAの最小化
12	6月27日	DFAの最小化, 有限オートマトンの応用
13	7月04日	プッシュダウンオートマトン, チューリング機械
14	7月11日	形式言語理論, 文脈自由文法
15	7月18日	期末試験, まとめ

出張などにより, 授業日が変更になる場合があります。

山梨大学

プログラミングコンペティション

- <http://www.cs.yamanashi.ac.jp/progcomp11/>
- 部門:
 - 初級者部門(KM1・2年生)
 - 一般部門
- スケジュール:
 - 06月15日 課題発表(既に発表済み)
 - ▶ **08月12日 応募締め切り (まだ間に合います!!)**
 - 10月21日 解答締め切り
 - 11月07日 成績発表
 - 11月16日 表彰式(優秀者には豪華(!?)な副賞も)

授業アンケート

授業終了時に回収します。

- 時間割番号: 263222(KM-F), 263222KA(開放科目)
- 科目名: オートマトンと言語
- 教員名: 鈴木良弥

- Fコース独自の質問項目
- 12. 創意・工夫
この授業に関して, 教員の創意・工夫が感じられた。

- 13. コミュニケーション
この授業において, 教員は学生の理解度・反応をみて授業していた。

今日のメニュー

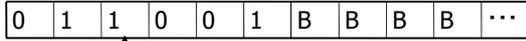
- チューリング機械
- 文脈自由文法
- まとめ

4.5.2 チューリング機械

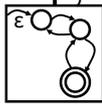
重要!

- 言語受能力が最も高いオートマトン
- 半無限長の読み書きが自由にできるテープを用いた有限状態機械

読み書きテープ (初期状態では入力語が記述されている)



読み書きヘッド (初期状態: 左端 語の先頭文字位置
テープ上を左右に移動, read, rewrite)



有限状態制御部

最終状態に遷移すると停止して入力語を受理する

7

チューリング機械(TM)の定義

TM $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, S, B, F)$

Q : 内部状態の集合

Σ : 入力アルファベット B を含まない

Γ : テープ記号の集合 ($\Gamma \supset \Sigma$)

B : 空白記号 Γ の要素であるが Σ の要素ではない

δ : 状態遷移関数 $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, S, L\}$

R : ヘッドを右に移動, S : ヘッドを移動させない,

L : ヘッドを左に移動

S : 初期状態 $S \in Q$

F : 最終状態 (受理状態) の集合 $F \subset Q$

8

例題4.71 $w_1=0101$

$Q=\{q_0, q_1, q_f\}$, $\Sigma=\{0, 1\}$, $\Gamma=\{0, 1, b\}$, $S=q_0$, $B=b$, $F=\{q_f\}$

状態 q_0 に遷移し,
読み書きテープのヘッドの位置にある文字を b に置き換え,
ヘッドを右にシフトする

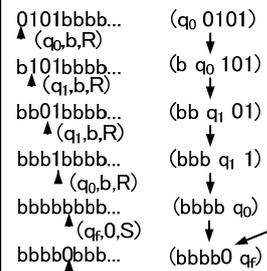
δ	0	1	b
q_0	(q_0, b, R)	(q_1, b, R)	$(q_f, 0, S)$
q_1	(q_1, b, R)	(q_0, b, R)	$(q_f, 1, S)$
q_f	---	---	---

9

例題4.71 答え

$w_1=0101$

時点表示 (計算状況)



δ	0	1	b
q_0	(q_0, b, R)	(q_1, b, R)	$(q_f, 0, S)$
q_1	(q_1, b, R)	(q_0, b, R)	$(q_f, 1, S)$
q_f	---	---	---

w : 1が奇数個 \rightarrow 1を出力
 w : 1が偶数個 \rightarrow 0を出力

最終状態 q_f に遷移 $\rightarrow w_1$ を受理

10

前回の練習問題2

例題4.71 $w_2'=011010$

$Q=\{q_0, q_1, q_f\}$, $\Sigma=\{0, 1\}$, $\Gamma=\{0, 1, b\}$, $S=q_0$, $B=b$, $F=\{q_f\}$

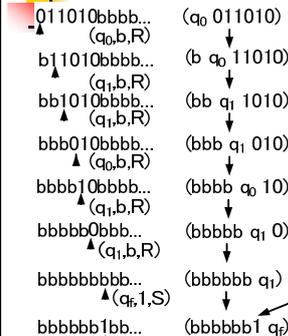
δ	0	1	b
q_0	(q_0, b, R)	(q_1, b, R)	$(q_f, 0, S)$
q_1	(q_1, b, R)	(q_0, b, R)	$(q_f, 1, S)$
q_f	---	---	---

11

前回の練習問題2 例題4.71 答え

前回はここまで

時点表示 (計算状況)



$w_2'=011010$

w : 1が奇数個 \rightarrow 1を出力
 w : 1が偶数個 \rightarrow 0を出力

最終状態 q_f に遷移 $\rightarrow w_2$ を受理

12

練習問題1

例題4.71 w2=01101

$Q=\{q_0, q_1, q_f\}$, $\Sigma=\{0,1\}$, $\Gamma=\{0,1,b\}$, $S=q_0$, $B=b$, $F=\{q_f\}$

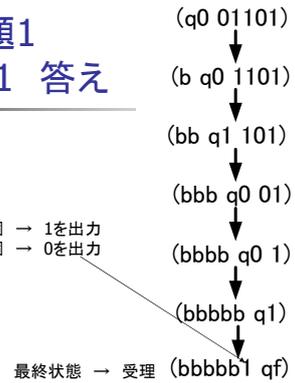
δ	0	1	b
q0	(q0,b,R)	(q1,b,R)	(qf,0,S)
q1	(q1,b,R)	(q0,b,R)	(qf,1,S)
qf	---	---	---

練習問題1

例題4.71 答え

w2=01101

w: 1が奇数個 → 1を出力
w: 1が偶数個 → 0を出力



4.5.3 オートマトンと計算理論

オートマトンの受理する言語クラス

オートマトン	受理言語型	言語クラス
チューリング機械	第0型言語	句構造言語 (PSL)
線形拘束チューリング機械	第1型言語	文脈依存言語 (CSL)
プッシュダウンオートマトン	第2型言語	文脈自由言語 (CFL)
有限オートマトン	第3型言語	正規言語 (RL)

RL \subset CFL \subset CSL \subset PSL (チョムスキーの言語階層)

万能チューリングマシン

- 任意のTMIについて、その動作表を与えられるとあたかもそのTMのように振る舞うTM
- コンピュータ
 - プログラム=動作表(状態遷移関数表)
 - 入力=入力語
 - コンピュータは万能TM
- チューリングテスト
 - TM M が人間
 - コンピュータ(TM)がTM M を完全に模倣できるか

5 形式言語理論入門

- 5.1 形式言語理論
- 5.2 文脈自由文法**
- 5.3 線形文法と正規言語
- 5.4 形式言語のクラス階層とオートマトン
- 5.5 言語処理への応用

形式文法Gの定義

- $G=(N,T,P,S)$
- N: 非終端記号の集合
- T: 終端記号の集合
- P: プロダクション
- S: 開始記号

5.2 文脈自由文法

- 文脈自由文法 (CFG : Context-Free Grammar)
 - 文脈自由プロダクションのみから構成される
 - 文脈自由プロダクション
 - $\alpha \rightarrow \beta$
 - ただし, $\alpha \in N, \beta \in V^*$
 - N: 非終端記号の集合, T: 終端記号の集合, V: NとTの直和
 - 左辺が変数1つ
- 文脈依存文法 (CSG : Context-Sensitive Grammar)
 - 文脈依存プロダクションを含むプロダクションから構成される
 - 文脈依存プロダクション
 - $u\alpha v \rightarrow \beta v$ ただし, $\alpha \in N, u, v \in V^*, \beta \in V^+$
 - $u=v=\epsilon$ のとき文脈自由プロダクションとなる

--

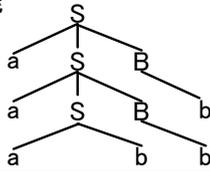
例題5.9 文脈自由文法の例

- CFG $G=(N,T,P,S)$
- $N=\{B,S\}$
- $T=\{a,b\}$
- $P: S \rightarrow aSB \mid ab$
 $B \rightarrow b$
- 語 $aaabbbb$ の導出過程
- $L(G)$ はどのような言語か

20

例題5.9

- CFG $G=(N,T,P,S)$
- $N=\{B,S\}$
- $T=\{a,b\}$
- $P: S \rightarrow aSB \mid ab, B \rightarrow b$
- $S \rightarrow aSB \Rightarrow aaSBB \Rightarrow aaabBB \Rightarrow aaabbbB \Rightarrow aaabbbb$
- $L(G): a^n b^n$
- 正規表現 (有限オートマトン) では表せない
- 文脈自由文法 (プッシュダウンオートマトン) では表現可能
- 構文木



21

練習問題2

例題5.10 文脈依存文法の例

- CSG $G=(N,T,P,S)$
- $N=\{A,B,S\}$
- $T=\{a,b\}$
- $P: S \rightarrow aSBA \mid abA,$
 $AB \rightarrow BA, bB \rightarrow bb,$
 $bA \rightarrow ba, aA \rightarrow aa$
- 語 $aabbbaa$ の導出過程
- $L(G)$ はどのような言語か

22

練習問題2 解答

例題5.10 aabbbaa

$P: S \rightarrow aSBA \mid abA,$
 $AB \rightarrow BA, bB \rightarrow bb,$
 $bA \rightarrow ba, aA \rightarrow aa$

- $S \rightarrow aSBA \Rightarrow aabABA \Rightarrow aabBAA \Rightarrow aabbAA$
- $\Rightarrow aabbbaA \Rightarrow aabbbaa$
- $L(G): a^n b^n a^n$

23

今日のまとめ

- チューリング機械
 - モデル
 - 計算状況の推移
- 文脈自由文法

「オートマトンと言語」と関連科目

- 正規表現
 - → プログラミング演習全般
- 有限オートマトン
 - → プログラミング言語論
 - → デジタル回路
 - → ハードウェア基礎実験
 - → ハードウェア実験I
- 有限オートマトンの最小化
 - → プログラミング演習全般
 - → アルゴリズムとデータ構造III
- プッシュダウンオートマトンとチューリング機械
 - → アルゴリズムとデータ構造III
 - → 計算機アーキテクチャI
- 文脈自由文法
 - → ヒューマン・マシンインタフェース
- 学習した項目
 - → 関連科目

25

期末試験

- 日時: **7月27日(水) 1時限**
- 場所: **T1-11**
- 出題範囲:
 - 教科書の2章~4章
 - 5章(今日の授業)

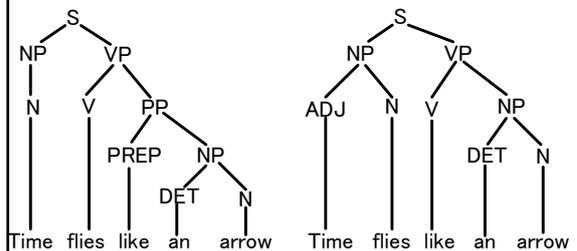
26

これ以降は付録 (授業はここまで)

構文木(導出木)

- Time flies like an arrow.

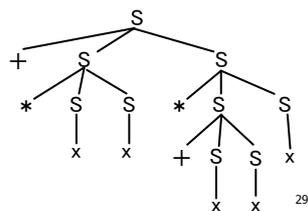
S → NP VP
 NP → N | DET N | ADJ N
 VP → V PP | V NP
 PP → PREP NP
 N → Time | arrow | flies
 V → flies | like
 PREP → like
 DET → an



28

例題5.11

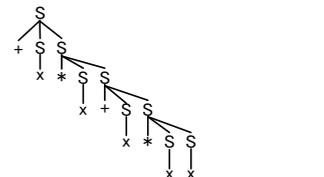
- $N = \{S\}, T = \{x, +, *\}, P = \{S \rightarrow +SS | *SS | x\}$
- $w = +*xx^* + xxx$
- $S \Rightarrow +SS \Rightarrow +*SSS \Rightarrow +*xSS \Rightarrow +*xxS \Rightarrow +*xx^*SS \Rightarrow +*xx^* + SSS \Rightarrow +*xx^* + xxx$



29

例題5.12 ①

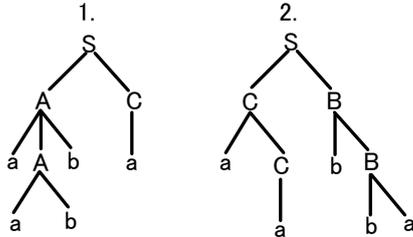
- $x + x^*(x + x^*x)$
- 前置記法 $+x^*x + x^*xx$
- $S \Rightarrow +SS \Rightarrow +xS \Rightarrow +x^*SS \Rightarrow +x^*xS \Rightarrow +x^*x + SS \Rightarrow +x^*x + xS \Rightarrow +x^*x + x^*SS \Rightarrow +x^*x + x^*xS \Rightarrow +x^*x + x^*xx$
- 構文木



30

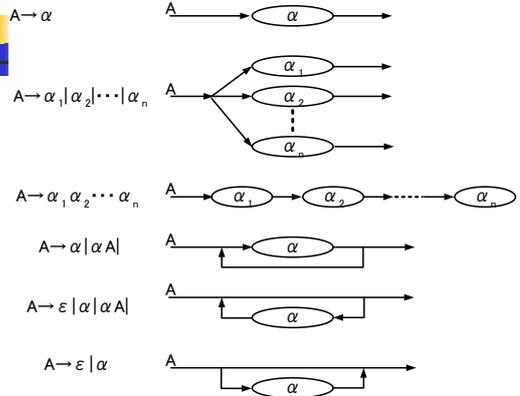
練習問題4 例題5.27 答え
同一文字列に対して2種類の導出
木が構成可能 → 曖昧である

- 1. $S \rightarrow AC \rightarrow aAbC \rightarrow aAba \rightarrow aabba$
- 2. $S \rightarrow CB \rightarrow aCB \rightarrow aCbB \rightarrow aabB \rightarrow aabba$



37

CFGの構文図式



38

文脈自由文法の簡単化

- 以下の書き換え規則を削除する
- 詳しくは154ページ
 - 開始記号Sから導出に使われることの無い非終端記号
 - ϵ -規則 ($A \rightarrow \epsilon: A \in N$)
 - 単位規則 ($A \rightarrow B: A, B \in N$)

39

例題5.31 ①

- $S \rightarrow aA, A \rightarrow bA | \epsilon$
 - $S \rightarrow aA$
 - $A \rightarrow bA$
 - $A \rightarrow \epsilon$
- $S \rightarrow aA|a, A \rightarrow bA|b$

40

例題5.31 ②

- $S \rightarrow aA, A \rightarrow aA|bB, B \rightarrow bB | \epsilon$
 - $S \rightarrow aA$
 - $A \rightarrow aA$
 - $A \rightarrow bB$
 - $B \rightarrow bB$
 - $B \rightarrow \epsilon$
- $S \rightarrow aA, A \rightarrow aA|bB|b, B \rightarrow bB|b$

41

例題5.31 ③

- $S \rightarrow aAB, A \rightarrow aA|a|Bb, B \rightarrow bB | \epsilon$
 - $S \rightarrow aAB$
 - $A \rightarrow aA$
 - $A \rightarrow a$
 - $A \rightarrow Bb$
 - $B \rightarrow bB$
 - $B \rightarrow \epsilon$
- $S \rightarrow aAB, A \rightarrow aA|a|Bb|b, B \rightarrow bB|b$

42

例題5.32 ①

- $S \rightarrow aA, A \rightarrow aB|B, B \rightarrow bB|b$

43

例題5.33 ①

- $S \rightarrow AB|a, A \rightarrow a$
 - $S \rightarrow AB$
 - $S \rightarrow a$
 - $A \rightarrow a$
- $B \rightarrow$ が無いので $S \rightarrow AB$ を削除
- $S \rightarrow a$

44

文脈自由文法の標準形

■ チョムスキー標準形

文脈自由文法の規約化された生成規則が、すべて $A, B, C \in N, a \in T$ として、
 $A \rightarrow BC$ または $A \rightarrow a$
の形をしているとき、この生成規則をチョムスキー標準形という

45

文脈自由な生成規則のチョムスキー標準形への変換

- $X, A, B, C \in N, a \in T$ として、
- $X \rightarrow aB$ ならば $X \rightarrow AB, A \rightarrow a$ と分解する
- $X \rightarrow ABC$ ならば $X \rightarrow AY, Y \rightarrow BC$ と分解する

46

例題5.34

- 文法 $G=(N, T, P, S)$ において、 $N=\{S, A, B, C\}$, $T=\{a, b\}$, P を、 $S \rightarrow AaC|CbBa, A \rightarrow aAb|ab, B \rightarrow bB|b, C \rightarrow Ca|a$ とする。この文法 G を
- チョムスキー形生成規則をもつ文脈自由文法に書き換えよ。

47

例題5.34 答え

- $S \rightarrow AaC \Rightarrow S \rightarrow AS_1, S_1 \rightarrow S_2C, S_2 \rightarrow a$
- $S \rightarrow CbBa \Rightarrow S \rightarrow CS_3, S_3 \rightarrow S_4S_5, S_4 \rightarrow b, S_5 \rightarrow BS_2$
- $A \rightarrow aAb \Rightarrow A \rightarrow S_2A_1, A_1 \rightarrow AS_4$
- $A \rightarrow ab \Rightarrow A \rightarrow S_2S_4$
- $B \rightarrow bB \Rightarrow B \rightarrow S_4B$
- $C \rightarrow Ca \Rightarrow C \rightarrow CS_2$

48